Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Ötödik feladatsor (2009 okt. 6–7)

Gyakorló feladatok

4.2.4. *Számítsuk ki az $f \circ g$ és $g \circ f$ kompozíciókat, ahol*

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mely $n \geq 1$ egészekre lesz S_n kommutatív (vagyis Abel-csoport)?

4.2.25. *Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon értelmezett „hátulról előre” permutációval is (amelynél az alsó sorban a felső sorrend fordítottja szerepel).

4.2.23. *Bizonyítsuk be, hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$, illetve hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_kx_1)(x_{k-1}x_1)\ldots(x_3x_1)(x_2x_1)$.*

4.8.14. *Mutassuk meg, hogy ha $(x_1 \ldots x_k)$ egy tetszőleges ciklus az S_n csoportban, és $f \in S_n$, akkor $f \circ \big(x_1 \ldots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$.*

4.2.26. *Legyen $f = (12)(345)$. Hány különböző hatványa van ennek a permutációnak a kompozíció műveletére nézve? Melyik a legkisebb hatványa, ami az egységelemet adja? Mely k és ℓ egészekre igaz, hogy $f^k = f^\ell$?*

4.2.27. *Rendezhetők-e a könyvek a könyvespolcon úgy, hogy csak szomszédos (helyen lévő) könyvek cseréjét engedjük meg?*

4.2.28. *Mutassuk meg, hogy egy kártyacsomag lapjainak tetszőleges sorrendje megkapható a következő kétféle mozdulat véges sokszori alkalmazásával: a legfelső két lap cseréje, illetve a csomag elemelése (azaz a csomag tetejéről leveszünk egy kisebb csomagot, és azt változatlan sorrendben az aljára tesszük). Hogyan fogalmazható meg ez az állítás S_n permutációi segítségével? Milyen ciklusfelbontású permutációk felelnek meg ennek a két mozdulatnak?*

(Sokcsillagos változat: a felső két lap cseréjét, illetve a felső lap legalulra rakását véletlenszerűen nagyon sokszor alkalmazzuk 1/2 valószínűséggel. Mutassuk meg, hogy a kártyacsomag egyenletesen megkeveredik, vagyis ha a mozdulatok száma tart a végtelenhez, akkor minden lapsorrend egyforma valószínűséggel szerepel.)

4.2.29. *Ha egy kártyacsomag négy lapból áll, és az emeléseken kívül az első és a harmadik lapot szabad megcserélni, akkor megkaphatjuk-e a lapok összes lehetséges 24 sorrendjét?*

4.2.31. *Adjuk meg az összes olyan $f \in S_n$ permutációt, amely fölcserélhető az $(1, 2, \ldots, n)$ ciklussal.*

4.2.32. *Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusokat nem írjuk ki).*

Nehezebb feladatok

4.2.30. *Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 3$, akkor A_n minden eleme (azaz minden páros permutáció) előáll hármasciklusok szorzataként.*

4.2.33. *Adott S_n transzpozícióinak egy halmaza. Készítsünk egy G gráfot az $\{1, 2, \dots, n\}$ csúcshalmazon úgy, hogy ha a halmazban benne van az (ab) transzpozíció, akkor behúzzuk az a-t b-vel összekötő élet. Bizonyítsuk be a következő állításokat.*

a) Ha a G gráf összefüggő, akkor az adott transzpozíciók alkalmas szorzataként minden permutáció előállítható (a szorzatban ugyanaz a transzpozíció többször is szerepelhet).

b) Ha i és j a G gráf különböző komponenseiben vannak (vagyis nincs közöttük út), akkor az adott transzpozíciók szorzataként nem állítható elő egyetlen olyan permutáció sem, amely i-t j-be viszi.

4.2.34. *Mutassuk meg, hogy S_n valamennyi eleme előáll legfeljebb $n-1$ darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez $n-1$ transzpozíciónál kevesebb nem elegendő?*

4.2.35. *Tegyük fel, hogy k és t egynél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \dots, n$ számok $1, 2, \dots, n$ sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet fölcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden lehetséges sorrendhez, ha $k + t - 1 \leq n$.*

1. *Készítsünk négyelemű testet az összeadás és a szorzás táblázatának megadásával.*

Megoldás: III/16. Az AB és BA mátrixok nyoma is $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$, tehát egyenlők, ezért a különbségüknek nulla a nyoma, és így nem lehet az egységmátrix.

Megoldás: III/18. Ha $A = ((a_{ij}))$, $B = ((b_{ij}))$ kétszer kettes mátrixok, $AB = ((c_{ij}))$ és

$$m_1 = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})\,, \quad m_2 = (a_{21} + a_{22})b_{11}\,,$$
$$m_3 = a_{11}(b_{12} - b_{22})\,, \quad m_4 = a_{22}(b_{21} - b_{11})\,, \quad m_5 = (a_{11} + a_{12})b_{22}\,,$$
$$m_6 = (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12})\,, \quad m_7 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})\,,$$

akkor

$$c_{11} = m_1 + m_4 - m_5 + m_7\,, \quad c_{12} = m_3 + m_5\,,$$
$$c_{21} = m_2 + m_4\,, \quad c_{22} = m_1 - m_2 + m_3 + m_6\,.$$

Nagy mátrixokra érdemes alkalmazni úgy, hogy blokkokra bontjuk (Strassen-algoritmus). A műveletigény így cn^3-ről $cn^{2{,}807}$-re vihető le (n a mátrix mérete). A Coppersmith–Winograd algoritmus nagyságrendje már $cn^{2{,}376}$.