Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Negyedik feladatsor (2009 szept. 29–30)

Gyakorló feladatok

2.2.35. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e, mik az invertálható elemeik?*

a) $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ *a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

b) A valós függvények halmaza a pontonkénti összeadásra (azaz $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$*), és a kompozícióra, mint szorzásra.*

c) Tetszőleges Abel-csoport, a szorzást úgy definiáljuk, hogy minden szorzat nulla.

d) Egy X *halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés. (Két halmaz szimmetrikus differenciája azokból az elemekből áll, amelyek a két halmaz közül pontosan egyben vannak benne.)*

2.2.43. *Döntsük el az alábbi* $\varphi : R_1 \to R_2$ *leképezésekről, hogy tartják-e a megadott műveleteket.*

a) $R_1 = \mathbb{R}^+$, $R_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = 2^x$.

b) $R_1 = \mathbb{R}^+$, $R_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.

c) $R_1 = \mathbb{C}^+$, $R_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$.

d) $R_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $R_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60 *_{100} x$.

e) $R_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $R_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.

2.2.44. *Legyen* $\varphi : G_1 \to G_2$ *szorzattartó leképezés két csoport között. Mutassuk meg, hogy* φ *az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz* φ *az inverzképzés műveletét is tartja).*

2.2.22. *Igazoljuk, hogy tetszőleges gyűrűben* $0r = r0 = 0$ *és* $(-r)s = -(rs)$.

2.2.36. *Adjunk példát olyan* R *gyűrűre és olyan* S *egységelemes részgyűrűre, ahol* S *egységeleme nem egységeleme* R*-nek. Van ilyen példa nullosztómentes* R *esetén is?*

2.2.5. *Mutassuk meg, hogy ha* $*$ *asszociatív kétváltozós művelet, akkor az* $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ *szorzatot akárhogyan is zárójelezzük, az eredmény mindig ugyanaz lesz.*

5.11.28. *Igazoljuk, hogy ha van egységelem, akkor az összeadás kommutativitása következik a többi gyűrűaxiómából.*

5.11.29. *Mutassuk meg, hogy ha egy gyűrűben csak egyetlen bal oldali egységelem van, akkor ez kétoldali egységelem.*

5.11.30. *Igazoljuk, hogy ha egy egységelemes gyűrű egy elemének csak egy balinverze van, akkor az jobbinverz is.*

2.2.39. *Tegyük föl, hogy* S *félcsoport. Igazoljuk az alábbi állításokat.*

a) Ha S*-ben van egy bal oldali* e *egységelem, és* S *minden elemének van* e*-re nézve balinverze, akkor* S *csoport (azaz* e *kétoldali egységelem, és minden elemnek van* e*-re nézve kétoldali inverze).*

b) Ha S-ben elvégezhető a „jobb oldali osztás", vagyis az $xa = b$ egyenlet minden $a, b \in S$ esetén megoldható, és elvégezhető a „bal oldali osztás" is, vagyis az $ay = b$ egyenlet is megoldható minden $a, b \in S$ esetén, akkor S csoport. Elég-e a kétféle osztás közül csak az egyik elvégezhetőségét feltenni?

Nehezebb feladatok

5.11.1. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}^{2\times 2}$-nek nemkommutatív részgyűrűjét alkotják a*

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $z, w \in \mathbb{C}$. Mutassuk meg, hogy ez ferdetest, és keressünk benne $\mathbb{C}$-vel izomorf résztestet.

2.2.40. *Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ az $a+b\sqrt{d}$ alakú számok részgyűrűjét $\mathbb{C}$-ben, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben végtelen sok invertálható elem van.*

2.2.45. *Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ az $\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ részgyűrűt $\mathbb{C}$-ben. Mikor izomorf $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$?*

2.2.41. *Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű, és tekintsük az $a + bi$ alakú formális kifejezéseket, ahol $a, b \in R$ (ezeket nevezhetnénk R fölötti komplex számoknak). A műveleteket ugyanúgy végezzük, mint a közönséges komplex számok esetén. Milyen p prímek esetén kapunk testet, ha $R = \mathbb{Z}_p$?*

5.11.32. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.*

Műsoron kívül: I/IHF, legjobb becslés.

Legyen e a valós tengellyel $0 \leq \alpha \leq \pi$ szöget bezáró, origón átmenő egyenes, $w(\alpha)$ pedig a megadott z_j vektorok e-re vett vetületei hosszának az összege. Ha z_j hossza r_j, szöge α_j, akkor $w(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} r_j |\cos(\alpha - \alpha_j)|$. Mivel $\int_0^\pi |\cos(\alpha - \alpha_j)| d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 2$, ezért $\int_0^\pi w(\alpha) d\alpha = 2\sum_{j=1}^{n} r_j = 2$. Így van olyan α, melyre $w(\alpha) \geq 2/\pi$ (mert π az intervallum hossza). Rögzítsünk egy ilyen α-hoz tartozó e egyenest. Ekkor az origóból kiinduló egyik félegyenesére vett vetületek összege legalább $1/\pi$. Az ennek megfelelő vektorok összegének hossza tehát legalább $1/\pi$ (ezek a vektorok egy e-re merőleges félsíkban vannak).

Az $1/\pi$ a legjobb n-től független becslés. Legyenek ugyanis a z_j számok az n-edik egységgyökök n-edrészei. Ezeket egymás után fűzve szabályos n-szöget kapunk, melynek átmérője $1/(n \sin(\pi/n))$. Könnyű látni, hogy semmilyen részletösszeg hossza nem haladhatja meg ezt az átmerőt, ami azonban $1/\pi$-hez tart $n \to \infty$ esetén (hiszen $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$).

1. *Adjuk meg azt a legkisebb r számot, melyre igaz a következő: ha egy síkbeli H halmaz bármely két pontjának távolsága legfeljebb 1, akkor H lefedhető egy r átmerőjű körrel.*