Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Harmadik feladatsor (2009 szept. 22–23)

Az $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix *nyoma* $\mathrm{tr}(M) = a + d$, *determinánsa* $\det(M) = ad - bc$.

Gyakorló feladatok

1. *Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és T az $y = x$ egyenesre való tükrözést. Írjuk fel ezek mátrixát, és számítsuk ki az (x, y) pont képét. Tükrözés, illetve forgatás lesz-e $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T$, $T \circ F_\alpha$?*

2. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Legyen A a térben az a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengely pozitív felét az y-tengely pozitív felébe viszi, B pedig az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi lesz ezeknél az $(1, 2, 3)$ pont képe? Igaz-e, hogy A és B fölcserélhető, azaz $A \circ B = B \circ A$?*

4. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok n-edik hatványát.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

6. *Számítsuk ki az 5×5-ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.*

7. *Az M és N mátrixok* **fölcserélhetők,** *ha $MN = NM$. Keressük meg az összes olyan $n \times n$-es mátrixot, amelyek minden $n \times n$-es mátrixszal felcserélhetők.*

8. *Igazoljuk, hogy ha M és N kétszer kettes mátrixok, akkor $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.*

9. *Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)E = 0$.*

10. *Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben az $X^2 = E$, $X^2 = -E$ és $X^2 = 0$ egyenletek mindegyikének minél több féle (végtelen sok) megoldását.*

11. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}$$

HF:

$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

12. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

13. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

14. *Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?*

15. *Adott* 2009 *szám úgy, hogy közülük bármely* 2008 *összege* 2009. *Melyek ezek a számok?*

Nehezebb feladatok

16. *Mely A és B $n \times n$-es mátrixokra lesz $AB - BA = E$?*

17. *Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két különböző embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.*

18. *Elvégezhető-e két kétszer kettes valós mátrix szorzatának kiszámítása* 8*-nál kevesebb (szám)szorzással? Az összeadások és kivonások száma akármennyi lehet.*

I/IHF, elemi becslés.

Ha egy háromszögben c-vel szemben nem hegyesszög van, akkor a koszinusz-tételből $c^2 \geq a^2 + b^2$, így a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt $c \geq (a+b)/\sqrt{2}$. Ezért ha bizonyos vektorok ugyanabba a síknegyedbe esnek, akkor indukcióval láthatjuk, hogy az összegük hossza legalább a hosszaik összegének $1/\sqrt{2}$-szöröse. A négy síknegyed egyikénben az összhossz legalább $1/4$. Az ide eső vektorok összegének hossza tehát legalább $1/(4\sqrt{2})$, ami nagyobb, mint $1/6$.

Az éles alsó becslés $1/\pi$. Ez lényegében következik abból, hogy adott kerületű konvex sokszögek közül a körnek a legkisebb az átmérője. Egy megoldásvázlat a következő feladatsoron szerepel majd.