

## Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Második feladatsor (2009 szept. 15–16)

### Gyakorló feladatok

**1.5.14.** Oldjuk meg az  $x^3 = 2$  és az  $x^4 = -9$  egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az  $x^8 = \sqrt{3} - i$ ,  $x^n = -1$  egyenletek összes megoldását is.

**1.5.24.** Fejezzük ki  $\cos x$  és  $\sin x$  segítségével  $\sin 7x$ -et. Általánosítsunk.

**1.5.22.** Számítsuk ki az  $n$ -edik egységgyökök szorzatát és négyzetösszegét.

**1.5.15.** Az  $1, -1, i, 1 + i, (1 + i)/\sqrt{2}, \cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi), \cos(336^\circ) + i\sin(336^\circ)$  számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely  $n$ -ekre lesznek ezek a számok  $n$ -edik egységgyökök? És primitív  $n$ -edik egységgyökök?

**1.5.20.** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

**1.** Határozzuk meg a  $\sum_{k=1}^n \overline{\varepsilon^k} \varepsilon^{\ell k}$  összeget ( $\varepsilon$  egy  $n$ -edik primitív egységgyök,  $j, \ell \in \mathbb{Z}$ ).

**1.5.17.** Mutassuk meg, hogy ha  $n > 0$  egész,  $\varepsilon \in \mathbb{C}$ , és  $\varepsilon^n = i$ , akkor  $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$ .

**1.5.18.** Ha  $\varepsilon$  primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet  $o(-i\varepsilon)$ ?

**1.5.19.** Hogyan függ össze  $\varepsilon$  és  $-\varepsilon$  rendje?

### Nehezebb feladatok

**1.4.16\***. Hozzuk zárt alakra a  $\sum_{m=0}^n \sin(mx)$  összeget.

**2.1.12\***. Legyen  $S = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{j^2}$ , ahol  $\varepsilon$  primitív  $n$ -edik egységgyök. Számítsuk ki  $|S|$ -et, és ha  $n$  prím, akkor  $S$ -et is.

**2\***. Az

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc \neq 0)$$

függvényeket törtlineáris függvényeknek nevezzük. Ez az egyetlen  $\infty$  szimbólummal kiegészített számsíkon (vagy komplex számgömbön) is értelmezhető (hogyan?).

a) Igazoljuk, hogy a fenti  $f$  függvény akkor és csak akkor képezi a komplex egységkört saját magára úgy, hogy a kör belseje a kör belsejére képződik, ha felírható a következő alakban:

$$f(z) = k \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (|k| = 1, |\alpha| < 1).$$

b) Keressünk olyan törtlineáris függvényt, amely az egységkörvonalat a valós tengelyre, belsejét a felső félsíkra képezi.

c) Igazoljuk, hogy kör képe is, egyenes képe is egyenes vagy kör lesz minden törtlineáris leképezésnél (segítség: 1.4.14. Feladat).