Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Tizenkettedik feladatsor (2009. december 1–2)

3.7.10. *Legyen* $f(x) = x^3 + px + q$*. Mutassuk meg, hogy* f *diszkriminánsa* $-27q^2 - 4p^3$*, vagyis a Cardano-képletben a négyzetgyök alatt álló* D *kifejezés* -108*-szorosa.*

3.7.11, 3.7.12, HF. *A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi egyenletrendszereket egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket* $\mathbb{C}$ *fölött.*

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 2 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + \qquad x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 1 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + \qquad x\cdot y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y^2x^2 + yx - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = y + z + 1 \\ y^2 = z + x + 1 \\ z^2 = x + y + 1 \end{cases}$$

3.8.8. *Legyen* $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$*, ahol* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$*. Igazoljuk a következő állításokat.*

(1) *Az* f *harmadfokú rezolvense* $g(x) = 8(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)$*, ahol*

$$u_1 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)/2\,, \quad u_2 = (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)/2\,, \quad u_3 = (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)/2\,.$$

(2) *Ha a megoldási eljárásban az* $u = u_1$ *gyököt használjuk, akkor az* f *másodfokúakra történő felbontásának tényezői* $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ *és* $(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ *lesznek.*

(3) $2u_1 - b + a^2/4 = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)^2/4$.

(4) $c - au_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)/2$.

(5) $u_1^2 - d = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4)^2/4$.

(6) *Ha* $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$*, akkor* $u_1^2 - d = (\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2/4$.

3.8.10. *Legyen* $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Q}[x]$ *és* g *az* f *harmadfokú rezolvense. Igazoljuk, hogy* f *pontosan akkor reducibilis* $\mathbb{Q}$ *fölött, ha az alábbi esetek egyike fennáll.*

(1) *Az* f*-nek van racionális gyöke.*

(2) *A* g*-nek van olyan* u *(racionális) gyöke, melyre* $2u - b + a^2/4$ *egy nem nulla racionális szám négyzete.*

(3) *Az* $u = b/2 - a^2/8$ *számra* $au = c$ *teljesül, és* $u^2 - d$ *egy racionális szám négyzete.*

Mutassuk meg, hogy a (2) és (3) azzal ekvivalens, hogy f *felbomlik két másodfokú, racionális együtthatós polinom szorzatára. Igazoljuk azt is, hogy ha* $a = 0$*, akkor a (3) feltétel így fogalmazható:* $c = 0$ *és* $\sqrt{b^2 - 4d} \in \mathbb{Q}$.

3.8.11. *Legyen* $f(x) = x^4 + bx^2 + d \in \mathbb{Q}[x]$*. Igazoljuk a következőket.*

(4) *Az* f *harmadfokú rezolvensének gyökei* $b/2$ *és* $\pm\sqrt{d}$.

(5) *Az* f *pontosan akkor reducibilis* $\mathbb{Q}$ *fölött, ha a* $b^2 - 4d$*,* $2\sqrt{d} - b$*,* $-2\sqrt{d} - b$ *számok valamelyike egy racionális szám négyzete.*

Az (5) pontbeli esetekben adjuk meg f *felbontását két másodfokú polinom szorzatára.*

1*. *Legyen az* $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ *főegyütthatója* a*, illetve* b*. Igazoljuk, hogy* f *és* g *rezultánsa pontosan akkor* ± 1*, ha* $(a, b) = 1$*, és* $fu + gv = 1$ *alkalmas* $u, v \in \mathbb{Z}[x]$*-re.*

2. *Legyenek* a, b, c *az* $x^3 - x^2 - 2x + 1$ *gyökei. Igazoljuk, hogy* $a - ab = 1$ *vagy* $a - ac = 1$.