Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Tizenegyedik feladatsor (2009. november 24–25)

Derivált polinom

1. *Határozzuk meg a deriválás módszerével* $x^3 + x^2 - x - 1$ *többszörös gyökeit.*

3.6.9. *Adjunk meg egy olyan* f *polinomot egy alkalmas test fölött, melynek egy nyolcszoros gyöke* f'*-nek is (pontosan) nyolcszoros gyöke, továbbá egy olyan* g *polinomot is, melynek egy nyolcszoros gyöke* g'*-nek (pontosan) tízszeres gyöke.*

3.6.10. *Legyen* $f \in \mathbb{C}[x]$*, és tegyük föl, hogy* f'*-nek egy* $b \in \mathbb{C}$ *szám pontosan* $k-1$*-szeres gyöke (ahol* $k \geq 1$ *egész). Igazoljuk, hogy* **ha** b **gyöke** f**-nek,** *akkor pontosan* k*-szoros gyöke. Szükséges-e a vastag betűs feltétel? Igaz-e az állítás tetszőleges test fölött?*

3.6.11. *Mely* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinomok oszthatók a deriváltjukkal?*

3.6.15. *Lehet-e egy* $\mathbb{Q}$*, illetve* $\mathbb{Z}_2$ *fölött irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben? Igaz-e* $\mathbb{Q}$*, illetve* $\mathbb{Z}_2$ *fölött, hogy ha az* f *polinomra* $(f, f') \neq 1$*, akkor van olyan* g *irreducibilis polinom, hogy* $g^2 \mid f$*?*

3.6.7, HF. *Adjuk meg* $x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$ *többszörös komplex gyökeit.*

Körosztási polinomok

3.9.2. *Számítsuk ki az egységgyökök algebrai alakjának felhasználásával:* Φ_3, Φ_6, Φ_{12}.

3.9.11. *Számítsuk ki a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.*

3.9.12. *Igazoljuk, hogy ha* $n > 1$ *páratlan, akkor* $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

3.9.13. *Számítsuk ki az* n*-edik körosztási polinomot minden* $n \leq 20$ *egészre.*

3.9.15. *Legyenek* $m \mid n$ *pozitív egészek úgy, hogy* n *minden prímosztója osztja* m*-et is. Igazoljuk, hogy* $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$.

3.9.16. *Számítsuk ki az előző feladat alapján a* $\Phi_n(x)$ *polinomokat abban az esetben, amikor* $n = 36, 72, 144, 100$.

3.9.18. *Alkalmazzuk a gyökök és együtthatók összefüggését a 12-edik, 18-adik, illetve 24-edik primitív egységgyökök összegének és szorzatának kiszámítására. Határozzuk meg* $\Phi_n(x)$*-ben a konstans tagot és* $x^{\varphi(n)-1}$ *együtthatóját, és ennek alapján általánosítsuk a feladatot* n*-edik primitív egységgyökökre.*

3.9.19. *Határozzuk meg a* Φ_n *polinom együtthatóinak összegét.*

3.9.22. *Bontsuk az* $x^{12} - 1$ *polinomot irreducibilisek szorzatára* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ *és* $\mathbb{Z}_5$ *fölött.*

3.9.24. *Mutassuk meg, hogy a prímhatvány indexű körosztási polinomok alkalmas eltoltjára teljesül a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele.*

Az elméleti anyaghoz kapcsolódó feladatok

3.6.12. *Mutassuk meg, hogy egy* f *polinom legalább* k*-szoros gyökei az* f*-nek és a* $k-1$*-edik deriváltjának közös gyökei. Igaz-e az állítás megfordítása?*

3.6.13. *Legyen* $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ *és* $k \geq 1$ *egész. Jelölje* $g_k(x)$ *azoknak az* $x - b$ *gyöktényezőknek a szorzatát, melyekre* $b \in \mathbb{C}$ *az* f*-nek pontosan* k*-szoros gyöke. Mutassuk meg, hogy* g_k *is racionális együtthatós.*

3.6.16. *Legyen* $f(x) = c(x - b_1)\ldots(x - b_n)$*, ahol* $c \neq 0, b_1, \ldots, b_n$ *egy* T *test elemei. Mutassuk meg, hogy*

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - b_1} + \ldots + \frac{f(x)}{x - b_n}\,,$$

és hogy $f'(b_i) = c(b_i - b_1)\ldots(b_i - b_{i-1})(b_i - b_{i+1})\ldots(b_i - b_n)$.

3.9.6. *Igazoljuk, hogy tetszőleges* $n \geq 1$ *egészre* $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

3.9.14. *Bizonyítsuk be, hogy* $\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$*, ahol* μ *a Möbius-függvény.*

3.9.17. *Legyenek* m *és* n *relatív prímek. Igazoljuk, hogy minden* mn*-edik egységgyök egyértelműen előáll egy* m*-edik és egy* n*-edik egységgyök szorzataként, és minden* mn*-edik primitív egységgyök egyértelműen előáll egy* m*-edik és egy* n*-edik primitív egységgyök szorzataként. Vezessük le ebből, hogy* $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$*, továbbá, hogy* $S(mn) = S(m)S(n)$*, ahol* $S(n)$ *jelöli az* n*-edik primitív egységgyökök összegét.*

Nehezebb feladatok

3.6.17. *Igazoljuk, hogy ha* $f \in \mathbb{C}[x]$ *legalább másodfokú polinom, akkor van olyan* $c \in \mathbb{C}$*, melyre* $f(x) + c$*-nek van többszörös komplex gyöke.*

3.6.18. *Igazoljuk, hogy egy* n*-edfokú, komplex együtthatós polinom legfeljebb* $n - 1$ *kivételes értéktől eltekintve az értékkészletének minden elemét* n *különböző helyen veszi fel.*

3.9.20. *Határozzuk meg a* $\Phi_n(-1)$ *értékét.*

3.9.21. *Mutassuk meg, hogy ha* m *és* n *relatív prímek, akkor*

$$\Phi_{mn}(x) = \prod_{o(\eta)=m} \Phi_n(\eta x)\,,$$

kivéve az $m = 2$*,* $n = 1$ *esetben, amikor a két oldal egymás ellentettje.*

3.9.23. *Legyen* p *prímszám, és* $n = p^k m$*, ahol már* $p \nmid m$*. Mutassuk meg, hogy modulo* p *a* Φ_n *egyenlő a* $\Phi_m^{\varphi(p^k)}$ *polinommal.*

3.9.25. *Igazoljuk, hogy a* Φ_n *polinom egy alkalmas eltoltjára akkor és csak akkor teljesül a Schönemann–Eisenstein, ha* n *prímhatvány, vagy egy páratlan prímhatvány kétszerese.*

3.9.26. *Mely* $n \geq 3$ *egészekre létezik olyan* n*-szög a síkon, amelynek minden szöge egyenlő, és az oldalai valamilyen sorrendben* $1, 2, \ldots, n$ *egység hosszúak?*