Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Tizedik feladatsor (2009. november 17–18)

3.4.15. *Bontsuk $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilisek szorzatára a $30x^3 - 30$ polinomot.*

3.5.4. *Az $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+24$, $x^{11}+72$ polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann–Eisenstein-kritérium? Mely n egészekre felel meg az $x^{11}+n$ polinom?*

3.5.6. *Mutassuk meg, modulo 3 vizsgálódva, hogy $6x^4+3x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ fölött.*

3.5.10. *Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az x^4+x+1 polinom?*

3.5.13. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a $\mathbb{Q}$ test fölött?* $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4, x^3+9, x^5+729, $x^{10}-x^5+1$, $x^{20}+20$, x^4+25, x^6+32, x^4+4x+1, x^4-2x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+4, $x^4+x^3+x^2+1$.

3.5.14. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok $\mathbb{Z}$ fölött?* $x^5+5x+26$, $3x^7+6x-18$, x^6+1, x^3+7x-3, $x^4+3x^3+x^2+1$.

3.5.15. *Legyen p prím és $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$. Mutassuk meg, hogy $f(x+1)$ teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételeit a p prímre.*

3.5.16. *Legyen $f(x,y)=x^9+x^3y^3+y^2+y\in\mathbb{C}[x,y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $g(y)/h(y)$ alakú racionális törtfüggvényekből álló testet ($g,h\in\mathbb{C}[y]$).*

a) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ fölötti polinom?

b) Következik-e a Schönemann–Eisenstein-tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ fölött?

c) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x,y]$-ban?

3.5.18. *Annak felhasználásával, hogy x^3-2 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{4}$ nem írható föl $a+b\sqrt[3]{2}$ alakban, ahol $a,b\in\mathbb{Q}$.*

Az elméleti anyaghoz kapcsolódó feladatok

3.4.18. *Bizonyítsuk be, hogy az $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ polinomok $\mathbb{Z}[x]$-beli legnagyobb közös osztója a következő eljárással határozható meg. Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust $\mathbb{Q}$ fölött, és a kapott racionális együtthatós polinomot írjuk föl rh alakban, ahol $r\in\mathbb{Q}$ és $h\in\mathbb{Z}[x]$ primitív polinom. Határozzuk meg f és g együtthatóinak a legnagyobb közös osztóját, ez legyen n. Ekkor f és g legnagyobb közös osztója nh. Hogyan módosítható ez az eljárás, ha két $\mathbb{C}[x,y]$-beli polinom legnagyobb közös osztóját keressük?*

3.5.6. *(Fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium) Tegyük föl, hogy f egy egész együtthatós, nem konstans polinom. Igazoljuk, hogy ha létezik olyan p prímszám, amelyre*

a) p nem osztja f konstans tagját;

b) p osztja f összes többi együtthatóját;

c) p^2 nem osztja f főegyütthatóját,

akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

3.5.11. *Legyen p egy prímszám, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött.*
b) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*
c) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.*
d) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*
e) *Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.*
f) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.*

Nehezebb feladatok

3.4.20. *Legyen f egy n-edfokú egész együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy ha f helyettesítési értéke legalább $2n + 1$ (különböző) helyen prímszám, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.*

3.5.17. *Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, hogy minden $g \in \mathbb{Z}[x]$ nem konstans polinomra az $f\big(g(x)\big)$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött?*

3.4.14. *Igazoljuk, hogy a Fermat-sejtésnek nincs „nemtriviális" megoldása polinomokra. Vagyis ha az $f, g, h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomok egyike sem nulla, és $f^n + g^n = h^n$ valamilyen $n \geq 3$ egészre, akkor f, g, h mindegyike konstans polinom.*

1. *Tegyük fel, hogy $a_1, \ldots, a_n$ páronként különböző egész számok. Bizonyítsuk be, hogy $(x - a_1) \ldots (x - a_n) - 1$ és $(x - a_1)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.*

2. *(Kombinatorikai nullhelytétel.) Tegyük fel, hogy a T test feletti $f \in T[x_1, \ldots, x_n]$ polinom azonosan nulla az $S_1 \times \ldots \times S_n \subseteq T^n$ halmazon (ahol egyik S_i sem üres). Legyen $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s)$. Mutassuk meg, hogy f felírható $\sum_{i=1}^n h_i g_i$ alakban, ahol mindegyik $h_i \in T[x_1, \ldots, x_n]$ polinom foka legfeljebb $\mathrm{gr}(f) - \mathrm{gr}(g_i)$.*

Vezessük le ebből a múltkori **IX/1.** feladatot.

3. *Legyen p prímszám és G egy hurokélmentes gráf, melyben minden pont foka legfeljebb $2p - 1$, és a fokszámok átlaga nagyobb, mint $2p - 2$. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan nem üres részgráfja, ahol minden pont foka p.*

A **VIII/1.** feladatban, ha a gráfba behúzunk egy extra élt, akkor a fenti **3.** feladat feltételei már teljesülnek p = 3-ra, és így a **VIII/1.** feladat konklúziója is. Extra él behúzása nélkül is igaz az állítás (ha nincsenek többszörös élek), ez Taskinov (nehezebb) tétele. Lehetséges azonban, hogy a fenti apparátussal Taskinov tételére is lehetne egy új bizonyítást találni.

4. *Vezessük le a fenti* **3.** *(illetve a múltkori* **IX/1.***) feladatból Chevalley következő tételét. Legyen p prím és $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$ olyan polinomok, melyek fokainak összege kisebb, mint n, és melyeknek van közös gyöke. Ekkor van még egy közös gyökük is.*

Megjegyzés: Valójában a közös gyökök száma p-vel osztható.

5. *Mutassuk meg, hogy ha adott $2n - 1$ egész szám, akkor kiválasztható közülük n darab, melyek összege n-nel osztható.*