Bsc algebra1 emelt szintű gyakorlat

Első feladatsor (2009 szept. 8–9)

A háromjegyű sorszámok a Kiss-jegyzetre utalnak, melyben a megoldások is elolvashatók. A gyakorló feladatok közül azokat is érdemes áttanulmányozni, amelyek az órán nem kerülnek sorra.

Gyakorló feladatok

1.3.11. *Végezzük el az alábbi műveleteket:* $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $|(1+1526i)^{100}/(1-1526i)^{100}|$, $(1+i)^{1241}$, $(-1+i\sqrt{3})^3$.

1.3.12,1.3.14. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között:* $x=(3+2i)\overline{x}$, $x=2\mathrm{Re}(x)$, $x^2+2x+2=0$, $x^2+2ix-1=0$.

1.3.13. *Határozzuk meg azokat a* $c+di$ *számokat, melyek négyzete* $20i-21$. *Oldjuk meg az* $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ *egyenletet.*

1.4.9. *Rajzoljuk le a komplex számsíkon a következő halmazokat:* $\{z:\mathrm{Re}(z+2i)\le -2\}$, $\{z:\mathrm{Re}(z+1)\ge \mathrm{Im}(z-3i)\}$, $\{z:|z-i-1|\le 3\}$, $\{z:|z-3+2i|=|z+4-i|\}$, $\{z:z+\overline{z}=-1\}$, $\{z:2z+5=2\overline{z}\}$, $\{z:1/z=\overline{z}\}$, $\{z:(1/z)+8=\overline{z}\}$, $\{z:|z|=iz\}$, $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}((z-1)/(z+1))=0\}$, $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}((z-1)/(z+1))=0\}$.

1.4.2, 1.4.8. *Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:* $1-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\cos(30°)-i\sin(60°)$, $\sin\alpha+i\cos\alpha$, $(1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha)/(1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.

1.4.10. *A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései:* $z\to 3z+2$, $z\to(1+i)z$, $1/\overline{z}$.

1. *Igazoljuk komplex számok segítségével, hogy egy paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.*

1.4.11. *Legyenek* z *és* w *különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.*

1.4.13. *Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.*

1.5.23. *Hozzuk zárt alakra a* $\sum_{m=0}^{\infty}\binom{1867}{4m}$ *összeget.*

Nehezebb feladatok

2. *Egy* 8×8*-as sakktáblából kivesszük az* $A1$ *és* $H8$ *mezőket. Lefedhető-e a maradék* 2×1*-es dominókkal?*

1.1.1*. *Lefedhető-e egy* 100×100*-as sakktábla* 8×1*-es dominókkal?*

IHF*. *A* $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ *számok abszolút értékeinek összege 1. Igazoljuk, hogy kiválasztható néhány, melyek összegének abszolút értéke legalább* $1/6$. *Éles az állítás?*