Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Második zárthelyi (2009. december 4.) — eredmények

1. Mivel $(ft)H = \{tf^{11}, f, tf^5, f^7\}$ (3 pont) és $t(ft) = f^{11}$ ebben nincsen benne (2 pont), ezért a két mellékosztály nem egyenlő (1 pont). (Valójában $H(ft) = \{tf^{11}, f^{11}, tf^5, f^5\}$).

2. Mivel tizesciklus már nem fér el, ezért egy tizedrendű elem egy ötösciklus megszorozva egy tőle diszunkt másodrendűvel, ami vagy transzpozíció, vagy két transzpozíció szorzata (1 pont). Ezek közül csak az $(abcde)(fg)(hk)$ lesz páros permutáció (1 pont). Az ilyenek száma $3\binom{9}{5}4! = 9072$, hiszen egy négyelemű halmazon három darab $(fg)(hk)$ alakú permutáció van (2 pont). Huszadrendű elem nincs, mert az ötösciklus mellé negyedrendű kellene, amiből csak egy négyesciklus fér el, de így páratlan permutációt kapunk (2 pont).

3. Az elemek rendjei: $o(1) = 1$, $o(3) = 4$, $o(7) = 4$, $o(9) = 2$, $o(11) = 2$, $o(13) = 4$, $o(17) = 4$, $o(19) = 2$ (2 pont). Négyelemű ciklikus részcsoportot generál mindegyik negyedrendű elem, ez két részcsoport: $\{1, 3, 7, 9\}$ és $\{1, 9, 13, 17\}$ (2 pont). Minden Klein-csoporttal izomorf részcsoportban három másodrendű elem van, ezért az egyetlen lehetőség az $\{1, 9, 11, 19\}$ (1 pont). Ezek tényleg részcsoportot alkotnak, mert modulo 20 teljesül, hogy $9 \cdot 11 \equiv 19$, $9 \cdot 19 \equiv 11$ és $11 \cdot 19 \equiv 9$ (1 pont).

4. Jelölje A azt a csúcsot, amelynél három zöld lap találkozik. Ekkor A csak olyan csúcsba mehet, ahol szintén három zöld lap találkozik, de ilyen csúcs más nincs, csak az A. Ezért A fixen marad mindegyik szimmetriánál (1 pont). Ha B szomszédja A-nak, akkor B csak olyan csúcsba mehet, amelynél két zöld és egy fehér lap találkozik, vagyis A szomszédaiba (1 pont). Ezek mindegyike meg is valósul egy A-ból kiinduló testátló körüli forgatással (1 pont). Ha egy ilyen csúcs fixen marad, a másik kettő még helyet cserélhet egy síkra tükrözéssel (1 pont). Ha A szomszédai fixen maradnak, akkor már a többi csúcs is (1 pont), ezért a szimmetriák száma $3 \cdot 2 = 6$ (1 pont).

5. Egy nyolcelemű Abel-csoport felbontása az alaptétel szerint $(\mathbb{Z}_2^+)^3$, $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ vagy $\mathbb{Z}_8^+$ lehet (2 pont). Az elsőben nincs negyedrendű elem, az utolsóban viszont van nyolcadrendű elem is (2 pont). Ezért a 3. feladat eredménye szerint $\mathbb{Z}_{20}^\times$ csakis $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$-gyel lehet izomorf (2 pont).

6. A keresett H részcsoport elemszáma $|A_5| = 60$-nak osztója (1 pont). Van benne ötödrendű és harmadrendű elem is, ezért elemszáma osztható 15-tel (2 pont). A tanult képlet szerint benne van $(12345)(123)(12345)^{-1} = (234)$ (1 pont), ezért $(123)(234) = (12)(34)$ és $(234)(123) = (13)(24)$, végül $(12)(34)(13)(24) = (14)(23)$ is (1 pont). Láttuk gyakorlaton, hogy ez utóbbi három másodrendű elem az egységelemmel együtt négyelemű részcsoportot alkot. Ezért H rendje néggyel is osztható, és így csakis 60 lehet. A keresett részcsoport tehát maga az A_5 (1 pont).