Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Első zárthelyi (2009. október 16.) — eredmények

1. a) Nem, mert nem zárt az összeadásra (0 pont). Például $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ benne van ebben a halmazban, de az összegük nincs (3 pont). b) Nincs benne, mert a három generáló polinom benne van abban az altérben, amit azok a polinomok alkotnak, melyekben nincs x-es tag, de $x-1$ nincs (3 pont). *Második megoldás:* Ha $x - 1 = \alpha(x^2 - 4) + \beta(x^3 - 8) + \gamma(x^3 + x^2)$ (1 pont), akkor x hatványai szerint rendezve az együtthatók a $-1 = -4\alpha - 8\beta$, $1 = 0$, $0 = \alpha + \gamma$, $0 = \beta + \gamma$ egyenletrendszert adják (1 pont), aminek nyilvánvalóan nincs megoldása (2 pont).

2. a) Ha $\alpha(v_1 + 2v_2) + \beta(v_2 - 3v_3) + \gamma(3v_1 + 5v_2 + 3v_3) = 0$, akkor a v_i-k szerint rendezve $(\alpha+3\gamma)v_1+(2\alpha+\beta+5\gamma)v_2+(3\gamma-3\beta)v_3 = 0$ (1 pont). Mivel v_1, v_2, v_3 függetlenek, ez csak úgy lehet, ha mindegyik együttható nulla (1 pont). Az egyenletrendszernek $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = -1$ nemtriviális megoldása, ezért a három vektor nem független (1 pont). b) Nem, ha E az egységmátrix, akkor $2 = r(-E) \neq (-1)r(E) = -2$ (3 pont).

3. a) Például $(x - 1)(x - 2)x^j$ bázist alkot, ahol $j = 0, 1, 2, 3, 4$, így a dimenzió 5 (1 pont, ha nincs több indoklás). A függetlenség is, a generátorrendszerség igazolása is 1 pont. Ezek hiányában 1 pont jár azért, ha valaki megjegyzi, hogy a dimenzió 5, mert kettővel csökken a 7-hez képest. b) A megfelelő transzformációk mátrixait az jellemzi, hogy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, azaz $a + b = 0$ és $c + d = 0$ (1 pont). Ezek között bázist alkot például $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (1 pont). Ennek indoklása további 1 pont (már azért a megjegyzésért is, hogy a dimenzió 2, mert két paraméterrel adható meg egy ilyen mátrix).

4. Az A mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), a B mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), ezért a BA mátrixa a két mátrix szorzata, vagyis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont). Mivel $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$, ezért az (x, y, z) pont képe $(x, 0, y)$ (1 pont). Az (x, y, z) akkor van a magtérben, ha $(x, 0, y) = (0, 0, 0)$, vagyis ha $x = y = 0$ (1 pont), ez a z-tengely. A képtér az $(x, 0, y)$ alakú vektorok halmaza, ez az xz-sík (1 pont).

5. A karakterisztikus polinom $-x^2(x-2)$ (1 pont). A sajátértékek 0 és 2 (1 pont). A 0-hoz tartozó sajátaltér kétdimenziós és az $(x, y, -x)^T$ alakú vektorokból áll (1 pont). A 2-höz tartozó sajátaltér egydimenziós és a $(z, 0, z)^T$ alakú vektorokból áll (1 pont). A minimálpolinom osztója $-x^2(x-2)$-nek, és gyökei a sajátértékek, ezért $x^2(x-2)$ vagy $x(x-2)$ lehet. A helyes válasz $x^2 - 2x$, mert már ennek is gyöke a mátrix (1 pont). Mivel a minimálpolinomnak nincs többszörös gyöke, ezért van sajátvektorokból álló bázis (1 pont). *Megjegyzés:* A 0-hoz tartozó sajátaltérben bázis $(1, 0, -1)^T$ és $(0, 1, 0)^T$, és ez $(1, 0, 1)^T$-gyel együtt sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Ha ezt tudjuk, akkor a minimálpolinom csak $x^2 - 2x$ lehet (nem is kell behelyettesíteni a mátrixot), az $x^3 - 4x^2$ nem jó, mert annak van többszörös gyöke.

6. Mivel $A(v_1)$, $A(v_2)$, $A(v_3)$ független, ezért v_1, v_2, v_3 is az. De generátorrendszer is, ezért bázis, és így $\dim(V) = 3$. *Második megoldás:* Mivel $A(v_1)$, $A(v_2)$, $A(v_3)$ bázis W-ben, $\dim(W) = 3$. A dimenziótétel miatt tehát $\dim V = \dim \operatorname{Ker}(A) + 3 \geq 3$. De $\dim(V) \leq 3$, mert van háromelemű generátorrendszere. Ezért $\dim(V) = 3$.