Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Első zárthelyi (2009. október 16)

Mind a hat feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladat megoldását külön lapra írjuk. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, kalkulátort, mobiltelefont sem. A fejlécet **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** kérjük kitölteni.

Név: ____________________________ EHA-kód: ______________ Gyakvez: CsP KE

1. *(3+3 pont)*

a) *Alteret alkotnak-e $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben $\mathbb{C}$ fölött azok a mátrixok, melyek főátlóbeli elemeinek öszege $-i$?*

b) *Igaz-e az $\mathbb{R}$ fölötti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben, hogy $x-1 \in \langle x^2-4, x^3-8, x^2+x^3\rangle$?*

2. *(3+3 pont)*

a) *Ha* v_1, v_2, v_3 *lineárisan független* $\mathbb{R}$ *fölött, akkor* $v_1 + 2v_2, v_2 - 3v_3, 3v_1 + 5v_2 + 3v_3$ *független-e?*

b) *Legyen* $A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *az a leképezés, amely minden mátrixhoz a rangját rendeli. Lineáris-e* A*?*

3. *(3+3 pont)*

a) *Adjunk meg egy bázist a* $\mathbb{Q}$ *fölötti* $\mathbb{Q}[x]$ *vektortér azon legfeljebb hatodfokú polinomjainak alterében, melyeknek gyöke az* 1 *és a* 2.

b) *Hánydimenziós alteret alkotnak a sík azon lineáris transzformációi, amelyeknek* $(1,1)$ *a magjában van?*

4. *Legyen A a térben az xy-síkra való merőleges vetítés, B pedig az x-tengely körüli $+90$ fokos forgatás. Írjuk föl a BA transzformáció mátrixát a tér szokásos bázisában (2 pont), számítsuk ki, hogy az (x, y, z) pontot hová képezi (1 pont), és adjuk meg a magterét, valamint a képterét (3 pont).*

5. *Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, sajátvektorait, minimálpolinomját, és döntsük el, hogy van-e sajátvektorokból álló bázisa.*

6. *(Külön lapra.) Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, mely a V vektortér $\{v_1, v_2, v_3\}$ generátorrendszerét W bázisába viszi. Mik V dimenziójának lehetséges értékei?*