BSc algebra2 keresztféléves vizsgatematika (2009 ősz)

A vizsga írásbeli, a vizsga- és konzultációs időpontok az ETR-ben olvashatók. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható (kalkulátor sem). A vizsga anyaga a

Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös kiadó, 2006, illetve a
Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, TypoTEX, 2007

tankönyveknek az alábbi tematikában kijelölt részei. Az F betű a Freud-könyvre, a K a Kiss-könyvre utal. A tanuláshoz hasznosak a gyakorlatokon szerepelt feladatsorok is!

A vizsga első részében 75 perc alatt $15 + 15$ darab egypontos kérdésre kell válaszolni (lineáris algebra, illetve csoportelmélet), ezek a fogalmak, tételek megértését, az anyag áttekintésének mértékét vizsgálják konkrét példák, ellenpéldák segítségével. Mintaként a régebbi vizsgadolgozatok letölthetők a `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/` címről. A vizsga második részében harminc perc alatt maximum 4 pontot lehet szerezni azzal, hogy egy bizonyítást kell leírni. A megfelelő tételek listája külön lapon található. Elégtelent az kap, akinek az első és az utolsó 15 kérdéscsoport valamelyikéből nincs meg a 6 pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított s összpontszáma kisebb, mint 14. A többiek osztályzata $\max(5, [(s-14)/4] + 2)$.

Vektorterek. A vektortéraxiómák, elemi tulajdonságok, példák (F4.1). Az altér fogalma és jellemzése a műveletekre való zártság segítségével (F4.2.2. Tétel). A generált altér mint lineáris kombinációk halmaza (F4.3), és mint adott elemeket tartalmazó legszűkebb altér (F4.3.4. Tétel); generátorrendszer. Lineáris függés és függetlenség, kapcsolatuk (F4.4). A bázis fogalma (F4.5), vektor koordinátái adott bázisban (F4.7). Független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré (F4.5.4. Tétel). Következmény: minden független rendszer kiegészíthető bázissá, a bázis elemszámának egyértelműsége (F4.5). A dimenzió fogalma. A bázis jellemzése, mint minimális generátorrendszer, illetve maximális független rendszer (F4.6). Valódi altér dimenziója (F4.6.4. Tétel). Alterek összege. Az összeg elemeinek előállítása mikor egyértelmű, direkt összeg (F4.3). Direkt kiegészítő altér létezése és dimenziója (F4.6.6. Feladat).

Lineáris leképezések. Lineáris leképezés, lineáris transzformáció. Képtér, magtér, az injektivitás és a szürjektivitás jellemzése (F5.1). A dimenziótétel (F5.4.1. Tétel). Előírhatósági tétel, lineáris leképezés mátrixa adott bázispárban (F5.3, F5.7). Műveletek, ezekre a lineáris leképezések vektorteret (F5.5), a lineáris transzformációk gyűrűt alkotnak (F5.6). Vektor képének koordinátái. Összefüggés a mátrixműveletek és a lineáris leképezések műveletei között, az inverz leképezés mátrixa (F5.7). A bázistranszformáció képlete, hasonló mátrixok (F5.8). Izomorfizmus. Két vektortér pontosan akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik (F5.2). A lineáris leképezések vektorterének dimenziója (F5.7.5. Tétel).

Véges dimenziós téren az invertálható transzformációk jellemzése (van bal-, illetve jobbinverze, nem bal, illetve jobb oldali nullosztó, magja nulla, képe az egész tér, bijektív); e jellemzések átvitele mátrixokra (F5.6). Véges dimenziós téren, ha AB az identitás, akkor BA is az. Lineáris transzformáció determinánsa, mint a mátrixának a determinánsa, ez nem függ a bázistól. A determináns geometriai jelentése (F9.8). Az invertálhatóság és a determináns kapcsolata. Vektorrendszer rangja, mint az általa generált altér dimenziója. A rang a maximális független részrendszerek elemszáma (F4.6.6. Tétel). Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Mátrix oszloprangja, lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának a rangja (F5.7.11. Feladat). Két lineáris leképezés szorzatának rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja (F5.7.12. Feladat). Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével (F3.4.3. Tétel, F4.6.7. Tétel).

Sajátérték, minimálpolinom. Lineáris transzformáció, négyzetes mátrix diagonalizálhatósága, sajátértékei, sajátvektorai (F6.1), sajátalterei, karakterisztikus polinomja; ennek gyökei a sajátértékek (F6.2). Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek, így ha annyi különböző sajátérték van, mint a tér dimenziója, akkor a transzformáció diagonalizálható (F6.1.9. Feladat). Mátrix és transzformáció minimálpolinomja. Az A transzformáció m_A minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek A gyöke. A minimálpolinom egyértelmű, egy f polinomnak A pontosan akkor gyöke, ha $m_A \mid f$ (F6.3). A sajátértékek gyökei a minimálpolinomnak (F6.3.5. Tétel). A Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix illetve transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának (F6.3.3. Tétel). Következmények: a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és így a foka legfeljebb a dimenzió; a minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek. A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége (F6.6.4. Tétel). Egy transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinomja lineáris tényezőkre bomlik és minden gyöke egyszeres (F6.6.1. Feladat).

Csoportok. A csoport fogalma, gyűrű additív és multiplikatív csoportja (K2.2). A szimmetrikus és az alternáló csoport, ciklusfelbontás (K4.2). A Klein-csoport, a diédercsoport (K4.1.23) és a kvaterniócsoport (K4.5.21). Az általános lineáris csoport, geometriai transzformációk csoportjai (K4.1). Hatványozás (K2.2), elemrend, tulajdonságok, a hatvány rendje (K4.3.10). Permutáció rendjének leolvasása a ciklusfelbontásról (K4.3.12).

Részcsoport (K2.2), jellemzése (K2.2.16). Lagrange tétele (K4.4.11), mellékosztály, index, a bal oldali és a jobb oldali mellékosztályok száma megegyezik (K4.4.18). Egy elemmel generált (azaz ciklikus) részcsoport, elem rendje osztója a csoport rendjének (K4.4.21), következmény: Euler-Fermat-tétel (K4.4.22). Prímrendű csoport ciklikus. Egy csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja, ha prímrendű (K4.4.23). A homomorfizmus fogalma, izomorfizmus, a ciklikus csoportok osztályozása (K4.3.20). Elemrend ciklikus csoportban, a generátorok száma (K4.3.24). Ciklikus csoport részcsoportja is ciklikus (K4.3.26). A ciklikus csoportok részcsoportjainak leírása (K4.3.24, K4.3.27). A négyelemű csoportok osztályozása (K4.5.18). Minden prímnégyzet rendű csoport kommutatív (K4.11.3). A hatod- és nyolcadrendű csoportok listája (K4.8.37, K4.11.10, KT.2).

A generált részcsoport elemeinek leírása (K4.6.1, K4.6.8). Permutációcsoport, tranzitivitás, pálya, stabilizátor, összefüggésük (K4.5.8), a pályák partíciót alkotnak (K4.5). A kocka szimmetriáinak a csoportja (K4.5.9, K4.9.32). A direkt szorzat fogalma (K4.9). Elem rendje a direkt szorzatban, a direkt szorzat mikor ciklikus (K4.9.8). Primitív gyök létezése (K4.9.9, K4.9.10). A véges Abel-csoportok alaptétele, egyértelműség (K4.9.15). A direkt szorzat belső jellemzése két tényező esetén (K4.9.12).