

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra2: 4. vizsga (keresztfélév)/1

2010. jan. 26.

I. rész (75 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első 15 és az utolsó 15 kérdésből egyaránt elért legalább 7 – 7 pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.

1. Legyen V a sík, és az \mathbb{R} elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda(a, b) = (\lambda a, b)$. Írjuk fel **egy** olyan vektortéraxiómát, és ahhoz egy **konkrét helyettesítést**, ami nem teljesül.

$$(\forall v \in V)(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) ((\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v)$$

$v = (1, 1), \lambda = \mu = 3$ esetén nem teljesül (mert $(6, 1) \neq (3, 1) + (3, 1) = (6, 2)$).

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy azok a polinomok, melyeknek gyöke az 1 vagy a 2, nem alkotnak alteret $\mathbb{R}[x]$ -ben \mathbb{R} fölött.

$x - 1$ és $x - 2$ benne van a halmazban, de az összegük nincs.

3. Legyen V azon legfeljebb ötödfokú polinomok altere $\mathbb{Q}[x]$ -ben, melyeknek gyöke a 3 és a 4. Mely n egészekre igaz, hogy V -nek van \mathbb{Q}^n -nel izomorf altere?

$$n \in \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

4. Legyen W az $x + y + z = 0$ egyenlettel megadott sík a térben. Adjunk meg egy olyan kétdimenziós U alteret a térben, melyre $U \cap W$ egydimenziós.

Például az xy sík (bármelyik origón átmenő sík jó, ami W -től különbözik).

5. Egy V vektortérben van egy 13 elemű összefüggő generátorrendszer, valamint egy 9 elemű független rendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$$\dim V \in \{ 9, 10, 11, 12 \}$$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$ -ben \mathbb{R} fölött egy háromelemű, 2 rangú vektorrendszert.

$$\{x, 2x, x^2\}.$$

7. Adjuk meg \mathbb{C} -ben \mathbb{R} felett az $A(z) = z/i$ transzformáció mátrixát az $i - 1, 1$ bázisban.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Legyenek A és B lineáris transzformációk $\mathbb{R}[x]$ -en \mathbb{R} fölött.
Ha $A(x - 1) = x - 1$ és $B(1 - x) = x$, akkor mennyi
 $(BA)(3x - 3)$?

$$(BA)(3x - 3) = -3x$$

- 9–10. Az alábbi levezetésben A lineáris transzformáció egy V vektortéren, λ, μ skalárok, és $v \in V$. Azt igazoljuk, hogy λA skalárszoros-tartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az 1 – 6 számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:

- 1) Lineáris leképezések összegének definíciója.
- 2) Lineáris leképezés skalárszorosának definíciója.
- 3) Vektortéraxióma.
- 4) A összegtartása.
- 5) A skalárszoros-tartása.
- 6) Testaxióma.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább 3 hiba 0 pont.

$$\begin{aligned} (\lambda A)(\mu v) &= \boxed{2} \\ \lambda(A(\mu v)) &= \boxed{5} \\ \lambda(\mu(A(v))) &= \boxed{3} \\ (\lambda \mu)(A(v)) &= \boxed{6} \\ (\mu \lambda)(A(v)) &= \boxed{3} \\ \mu(\lambda(A(v))) &= \boxed{2} \\ \mu((\lambda A)(v)) & \end{aligned}$$

11. Legyen A a transzponálás a kétszer kettes valós mátrixok \mathbb{R} feletti vektorterén. Mennyi A rangja?

$$\rho(A) = 4$$

12. A tér egy lineáris transzformációjának a rangja 1, és van kétdimenziós sajátaltère. Mi az ehhez tartozó sajátérték?

$$0$$

13. Adjunk meg egy **nem** diagonalizálható $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrixot, melynek determinánsa i .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja $x^2 - x + 1$.

Origó körüli 60 fokos forgatás.

15. Az $M \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x - i)^4$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$$m_M(x) = x - i.$$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban $(kjk)^{2009}k^{-2}$ értékét.

$$(kjk)^{2009}k^{-2} = -j$$

17. Legyen A_1 a síkon az eltolás $(1, 0)$ vektorral, A_2 pedig az eltolás $(0, 2)$ vektorral. Mennyi $A_1 \circ A_2$ rendje a sík egybevágóságainak csoportjában?

Végtelen ($A_1 \circ A_2$ eltolás $(1, 2)$ -vel).

18. Ha g csoportelem és g^{10} rendje 30, akkor mennyi g rendje?

$$o(g) = 300.$$

19. Számítsuk ki a D_8 diédercsoportban az $(f^{-7}t)^{100}ft$ rendjét.

$(f^{-7}t)^{100}ft$ rendje 2 (ez az elem az ft , mert $f^{-7}t$ tükrözés).

20. Adjuk meg az $(123)(2345)(456)$ permutáció rendjét és előjelét.

$$o((12)(34)(56)) = 2, \text{ előjel } -.$$

21. Hány 20 rendű elem van a \mathbb{Z}_{60}^\times csoportban?

0.

22. Adjuk meg \mathbb{Z}_{512}^+ összes 4 rendű elemét.

$\{128, 384\}$

23. Hány elemű A_8 -ban a 2 pályája?

8

24. Hány szimmetriája van egy szabályos hatszög alapú egyenes hasábnak?

24

25. Legyen G a komplex számsíkon az origó körüli forgatások csoportja. Az $5(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$, $25i$, $5i$, $3 + 4i$ pontok közül melyek vannak G ugyanazon pályáján?

$5(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$, $5i$, $3 + 4i$ (egy másik pályán pedig $25i$, e négy pont közül egyedül).

26. Az A_4 csoportban (123) és (124) melyik valódi K részcsoporthoz tartoznak ugyanabban a jobb oldali mellékosztályban?

$$K = \{id, (134), (143)\}.$$

27. Adjuk meg a \mathbb{Z}_{12}^\times csoport egy kételemű generátorrendszerét.

$$\{5, 7\}$$

28. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_6^+$ csoport összes negyedrendű elemét.

$$(1, 0), (1, 3), (3, 0), (3, 3).$$

29. Mely 6 elemű csoportoknak van legalább 3 másodrendű eleme?

$$S_3.$$

30. Ha felbontjuk a \mathbb{Z}_{24}^\times csoportot a véges Abel-csoportok alaptételének megfelelően, akkor milyen rendű tényezőkből hány keletkezik?

$$2 \text{ rendű } 3 \text{ darab.}$$

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra2: 4. vizsga (keresztfélév)/5

2010. jan. 26.

II. rész (30 perc). Az alábbi tétel precíz kimondása 1, a teljes bizonyításának leírása további 3 pontot ér. A választ a túldalalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a **nevét** és az **ELTE-azonosítóját** nyomtatott nagybetűkkel.

31. **Dimenziótétel.** (Összefüggés a képtér és magtér dimenziója között bizonyos feltételek fennállása esetén.)

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a 6 pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított S összpontszáma kisebb, mint 14. A többiek osztályzata:

	<i>Osztályzat</i>
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5