NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra2: 3. vizsga (keresztfélév)/1** *2009. jan. 19.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* $7-7$ *pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.*

1. Legyen $V = \mathbb{R}[x]$, és az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda p(x) = p(x)$. Írjuk fel **egy** olyan vektortéraxiómát, és ahhoz egy **konkrét helyettesítést,** ami nem teljesül.

   $(\forall v \in V)(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})\ \big((\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v\big)$
   $v = x$, $\lambda = \mu = 3$ esetén nem teljesül (mert $x \neq x + x$).

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy azok a mátrixok, melyek főátlójában az elemek előjele egyenlő, nem alkotnak alteret $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben $\mathbb{R}$ fölött.

   $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ benne van a halmazban, de az összegük nincs.

3. Legyen V azon polinomok altere $\mathbb{Q}[x]$-ben, melyeknek gyöke a 3 és a 4. Adjunk meg V-ben egy olyan alteret, amely izomorf $\mathbb{Q}^3$-nel.

   Például az $(x-3)(x-4)$, $(x-3)(x-4)x$, $(x-3)(x-4)x^2$ által generált altér.

4. Adjunk példát arra, hogy egy altérnek két különböző direkt kiegészítő altere is lehet.

   Például a síkon egy origón átmenő egyenesnek minden más ilyen egyenes direkt kiegészítő altere.

5. Egy V vektortérben van egy 13-dimenziós valódi altér, valamint egy 18 elemű, lineárisan független generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

   $\dim V \in \{\ 18\ \}$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek mindegyik elemét ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként.

   $\{x, x^2, x + x^2\}$.

7. Adjuk meg $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ felett az $A(z) = zi$ transzformáció mátrixát az i, $1 + i$ bázisban.

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

8. Legyenek A és B lineáris transzformációk $\mathbb{R}[x]$-en $\mathbb{R}$ fölött. Ha $A(x-1) = x-1$ és $B(1-x) = x$, akkor mennyi $(A-B)(3x-3)$?

$(A-B)(3x-3) =$ $6x-3$

9–10. Az alábbi levezetésben A lineáris transzformáció egy V vektortéren, λ skalár, és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy λA összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az $1-5$ számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:

1) Lineáris leképezés skalárszorosának definíciója.
2) A összegtartása.
3) A skalárszoros-tartása.
4) Vektortéraxióma.
5) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 hiba 2 pont, 1 hiba 1 pont, legalább két hiba 0 pont.

$$(\lambda A)(v+w) = \qquad \boxed{1}$$
$$\lambda\big(A(v+w)\big) = \qquad \boxed{2}$$
$$\lambda\big(A(v)+A(w)\big) = \qquad \boxed{4}$$
$$\lambda\big(A(v)\big)+\lambda\big(A(w)\big) = \qquad \boxed{1}$$
$$(\lambda A)(v)+(\lambda A)(w)$$

11. Legyen A a térben egy origón átmenő síkra való merőleges vetítés. Mennyi A rangja?

$\rho(A) =$ 2

12. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek egy kétdimenziós és egy egydimenziós sajátaltere van.

Például egy origón átmenő síkra tükrözés.

13. A sík egy lineáris transzformációjának sajátértékei 2 és 3. Mennyi a determinánsa?

6

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja x^2+1.

Origó körüli 90 fokos forgatás.

15. Az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ **nem** diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja x^4. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_M(x) =$ x^2, x^3, x^4.

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban $(ji)^{2009}k^{-2}$ értékét.

$(ji)^{2009}k^{-2} = \ k$

17. Adjunk meg a sík egybevágóságainak csoportjában A_1 és A_2 másodrendű elemeket, melyek szorzatának rendje 6.

Legyen A_1 és A_2 két 30 fokot bezáró tengelyre való tükrözés.

18. Ha $g \in G$ rendje 100, akkor mennyi g^{80} rendje?

$o(g^{80}) = \ 100/(100, 80) = 5.$

19. Számítsuk ki a D_8 diédercsoportban az $f^{-7}tf^{30}t$ rendjét.

$f^{-7}tf^{30}t$ rendje 8 (ez az elem az f^3).

20. Adjuk meg az (1234)(2345)(3456) permutáció rendjét és előjelét.

$o(124356) = 6$, előjel $-$.

21. Adjunk meg egy olyan ciklikus csoportot, melynek pontosan 10 részcsoportja van.

$\mathbb{Z}^+_{2^9}$ (vagy $\mathbb{Z}^+_{48}$).

22. Adjuk meg $\mathbb{Z}^+_{1024}$ összes 4 elemű részcsoportját.

$\{0, 256, 512, 768\}$

23. Hány elemű A_5-ben a 2 stabilizátora?

12

24. Hány szimmetriája van egy négyzet alapú egyenes csonkagúlának?

8

25. Legyen G a síkon az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja. Az $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ pontok közül melyek vannak G ugyanazon pályáján?

$(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ (egy másik pályán pedig $(1, 2)$, e négy pont közül egyedül).

26. Az S_4 csoportban (13) és (124) melyik négyelemű K részcsoport szerint vannak ugyanabban a **jobb** oldali mellékosztályban?

$K = \{id, (1324), (12)(34), (1423)\}$.

27. Adjuk meg a (ciklikus) $\mathbb{Z}_{18}^{\times}$ csoport egy generátorelemét, és írjuk is föl sorban a hatványait.

5, $5^2 \equiv 7$, $5^3 \equiv -1 \equiv 17$, $5^4 \equiv -5 \equiv 13$, $5^5 \equiv 11$, $5^6 \equiv 1$.

28. Adjuk meg $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_5^+$-nak egy kételemű generátorrendszerét.

$(0,1)$ és $(1,0)$.

29. Mely 8 elemű csoportoknak van legalább 4 negyedrendű eleme?

Q, $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$.

30. Bontsuk fel a $\mathbb{Z}_{18}^+ \times \mathbb{Z}_{90}^+$ csoportot a véges Abel-csoportok alaptételének megfelelően. Milyen rendű tényezőkből hány keletkezik?

2 rendű 2 darab, 5 rendű 1 darab, 9 rendű 2 darab.

NÉV: ____________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra2: 3. vizsga (keresztfélév)/5** *2009. jan. 19.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel teljes bizonyításának leírása összesen* 4 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **Két bal oldali mellékosztály vagy egyenlő, vagy diszjunkt.** Lagrange tételét sem kimondani, sem bizonyítani nem kell.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5