NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra2: 2. vizsga (keresztfélév)/1** *2010. jan. 5.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* 7 − 7 *pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.*

1. Legyen V a sík vektorainak csoportja az összeadásra, és az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda(a,b) = (\lambda a, 2\lambda b)$. Írjuk fel az(oka)t a vektortéraxiómá(ka)t, amely(ek) nem teljesül(nek).

   a) $(\forall v \in V)(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})\ \big((\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)\big)$;
   b) $\forall v \in V\ (1v = v)$.

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy azok a mátrixok, melyek főátlójában az elemek összege páros egész, nem alkotnak alteret $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben $\mathbb{R}$ fölött.

   Az egységmátrix benne van a halmazban, de a π-szerese nincs.

3. Adjunk meg $\mathbb{R}^{2\times 3}$-ban egy olyan alteret, amely izomorf $\mathbb{R}^4$-el.

   Például azok a mátrixok, amelyeknek a bal felső és jobb alsó sarkában nulla áll.

4. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemeiből álló $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, és W azon polinomok altere, melyeknek gyöke a 3. Adjuk meg V-ben W egy direkt kiegészítő alterét.

   Például a konstans polinomok (mert $p(x) = \big(p(x) - p(3)\big) + p(3)$ egyértelműen).

5. Egy V vektortérben van egy 13-dimenziós valódi altér, valamint egy 18 elemű, lineárisan összefüggő generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

   $\dim V \in \{\ 14,\ 15,\ 16,\ 17\ \}$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek egyik elemét ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként, de a másik kettőt nem.

   $\{0, x, x^2\}$.

7. Adjuk meg $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ felett az $A(z) = z/i$ transzformáció mátrixát az $1-i$, $1+i$ bázisban.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Legyenek A és B lineáris transzformációk $\mathbb{R}[x]$-en $\mathbb{R}$ fölött. Ha $A(x-1)=x+1$ és $B(1-x)=x-1$, akkor mennyi $(A-B)(2x-2)$?

$(A-B)(2x-2)=\ 4x$

9–10. Az alábbi levezetésben A és B lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy AB összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az $1-6$ számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:
1) Lineáris leképezések összegének definíciója.
2) A összegtartása.
3) B összegtartása.
4) A vektortéraxiómák egyszerű következménye.
5) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
6) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 hiba 2 pont, 1 hiba 1 pont, legalább két hiba 0 pont.

$$(AB)(v+w) = \quad \boxed{5}$$
$$A(B(v+w)) = \quad \boxed{3}$$
$$A(B(v)+B(w)) = \quad \boxed{2}$$
$$A(B(v))+A(B(w)) = \quad \boxed{5}$$
$$(AB)(v)+(AB)(w)$$

11. Legyen A a deriválás a legfeljebb tizedfokú polinomok vektorterén. Mennyi A rangja?

$\rho(A)=\ 10$

12. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek létezik háromdimenziós sajátaltere.

Például a helybenhagyás.

13. Adjunk meg egy $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli nem diagonalizálható mátrixot, melynek determinánsa $2i$.

Pl. $M=\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja x^2-1.

Origón átmenő egyenesre való tükrözés.

15. Az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix minimálpolinomja x^2. Mi a karakterisztikus polinomja?

$k_M(x)=\ x^4.$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban $(kj)^{2009}i^{-1}$ értékét.

$(kj)^{2009}i^{-1} = \ -1$

17. Adjunk meg a sík egybevágóságainak csoportjában A_1 és A_2 másodrendű elemeket, melyek szorzatának rendje végtelen.

Legyen A_1 és A_2 két párhuzamos tengelyre való tükrözés.

18. Ha G kommutatatív csoport, és g_1, g_2 másodrendű elemei, akkor mik $g_1 g_2$ rendjének lehetséges értékei?

1 és 2.

19. Számítsuk ki a D_8 diédercsoportban az $f^{-2}tf^{40}t$ rendjét.

$f^{-2}tf^{40}t$ rendje 4 (ez az elem az f^6).

20. Adjuk meg A_{10} egy 8 rendű elemét.

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10)$.

21. Hány 48 rendű elem van egy 31300000000 elemű ciklikus csoportban?

48 rendű elemek száma = 0

22. Adjuk meg $\mathbb{Z}_{72}^{+}$ összes négyelemű részcsoportját.

$\{0, 18, 36, 54\}$

23. Hány elemű a kocka szimmetriacsoportjában egy testátlót harmadoló pont stabilizátora?

$48/8 = 6$

24. Hány pályája van egy négyzet alapú egyenes csonkagúla szimmetriacsoportjának a csúcsok 8 elemű halmazán, és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei:	A pálya elemszáma:
az alsó lap csúcsai	4
a felső lap csúcsai	4

25. Az S_4 csoportban (234) és (12) melyik négyelemű K részcsoport szerint vannak ugyanabban a bal oldali mellékosztályban?

$K = \{id, (1234), (13)(24), (1432)\}$.

26. Mekkora a tf és a tf^5 által generált H részcsoport indexe D_8-ban?

$|D_8 : H| = 4$

27. Adjuk meg $\mathbb{Z}_{16}^{\times}$ egy kételemű generátorrendszerét.

3, 5.

28. Adjuk meg $\mathbb{Z}_{20}^{+}$-nak egy olyan B részcsoportját, mely $A = \{0, 5, 10, 15\}$-tel együtt a csoport direkt felbontását adja.

$B = \{0, 4, 8, 12, 16\}$.

29. Mely 8 elemű csoportoknak van legalább 5 másodrendű eleme?

D_4, $(\mathbb{Z}_2^+)^3$

30. Bontsuk fel a $\mathbb{Z}_6^+ \times \mathbb{Z}_{12}^+$ csoportot a véges Abel-csoportok alaptételének megfelelően. Milyen rendű tényezőkből hány keletkezik?

2 rendű 1 darab, 3 rendű 2 darab, 4 rendű 1 darab.

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra2: 2. vizsga (keresztfélév)/5** *2010. jan. 5.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel teljes bizonyításának leírása összesen* 4 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **Egy független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy generátorrendszeré.** A felhasznált segédtételeket nem kell kimondani, sem bizonyítani, de egyértelműen hivatkozni kell rájuk. **Kivétel:** aki nem a lineáris egyenletrendszeres bizonyítást írja le, hanem a kicserélési tételt használja, annak a kicserélési tételt is be kell bizonyítania (ennek precíz kimondásáért 1 pont jár).

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14*. A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5