NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra2: 1. vizsga (keresztfélév)/1** *2009. dec. 22.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* 7 − 7 *pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.*

1. Legyen V a D_4 diédercsoport, és az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda v = id$ minden esetben. Írjuk fel az(oka)t a vektortéraxiómá(ka)t, amely(ek) V-ben nem teljesül(nek).

   a) $\forall v, w \in V \ (v + w = w + v)$;
   b) $\forall v \in V \ (1v = v)$.

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a hárommal osztható fokú polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben a nullapolinommal együtt nem alkotnak alteret $\mathbb{R}$ fölött.

   x^{21} és $x - x^{21}$ benne van a halmazban, de összegük, azaz x nincs benne.

3. Legyen V a kétszer kettes, valós, diagonális mátixok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Adjunk meg egy háromdimenziós alteret $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, melynek V-vel vett összege $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   Például azok a mátrixok, amelyeknek a bal felső sarkában nulla áll.

4. Adjunk meg a térben az $(x, x, 0)$ $(x \in \mathbb{R})$ pontokból álló egyeneshez egy direkt kiegészítő alteret.

   Például az xz sík, vagyis az $(x, 0, z)$ alakú pontok halmaza.

5. Egy V vektortérben van egy 13-dimenziós valódi altér, valamint egy 18 elemű, lineárisan összefüggő, 15 rangú generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

   $\dim V \in \{ 15 \}$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek két elemét ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként, de a harmadikat nem.

   $\{x, 1, 2\}$.

7. Adjuk meg $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ felett az $A(z) = z/i$ transzformáció mátrixát az $i, 1$ bázisban (a sorrend lényeges!).

   $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Az identitás kétszeresének ellentettje hová viszi a $(-3, 4)$ pontot?

   A $(6, -8)$ pontba.

9–10. Az alábbi levezetésben A, B, C lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v \in V$, az egyik disztributivitást igazoljuk. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az $1-5$ számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:

1) Lineáris leképezések összegének definíciója.
2) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
3) Lineáris leképezés összegtartása.
4) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
5) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 hiba 2 pont, 1 hiba 1 pont, legalább két hiba 0 pont.

$$\begin{aligned} (AC+BC)(v) &= & \boxed{1} \\ (AC)(v)+(BC)(v) &= & \boxed{2} \\ A\big(C(v)\big)+B\big(C(v)\big) &= & \boxed{1} \\ (A+B)\big(C(v)\big) &= & \boxed{2} \\ \big((A+B)C\big)(v) & & \end{aligned}$$

11. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jobb oldali nullosztó. Mik a rangjának lehetséges értékei?

$\rho(M) = 1, 2$

12. Soroljuk föl a térben egy origót tartalmazó egyenes körüli 60 fokos forgatás (valós) sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:	1
Sajátalterek dimenziói:	1

13. Adjunk meg egy $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli nem diagonalizálható mátrixot, melynek determinánsa 2.

Pl. $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja $x-3$.

Az origó középpontú háromszoros nyújtás.

15. Az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2+x+1)^2$. Ha M komplex fölött sem diagonalizálható, akkor mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_M(x) = (x^2+x+1)^2.$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a $jkik^{-1}j$ szorzatot.

$jkik^{-1}j = -i$

17. Adjunk meg a sík egybevágóságainak csoportjában F_1 és F_2 végtelen rendű elemeket, melyek szorzatának rendje 2.

Legyen F_1 forgatás $\sqrt{2}$ fokkal, $F_2 = -F_1^{-1}$.

18. Adjuk meg A_9 egy 10 rendű elemét.

(12)(34)(56789)

19. Számítsuk ki a D_7 diédercsoportban az $f^{-2}tf^{43}t$ rendjét.

$f^{-2}tf^{43}t$ rendje 7 (ez az elem az f^4).

20. Ha a g csoportelem rendje 3000, mennyi lesz g^{200} rendje?

$o(g^{200}) = 3000/(3000, 200) = 15.$

21. Hány 24 rendű elem van egy 31200000000 elemű ciklikus csoportban?

24 rendű elemek száma = 8

22. Hány részcsoportja van a 72 elemű ciklikus csoportnak?

Részcsoportok száma = 12

23. Soroljuk fel a szabályos hatszög szimmetriacsoportjában az egyik élközéppont stabilizátorának összes elemét.

Identitás, tükrözés a megfelelő él felező merőlegesére.

24. Hány pályája van a kocka szimmetriacsoportjának a testátlókat negyedelő pontok 17 elemű halmazán (a csúcsokat is belevéve), és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei:	A pálya elemszáma:
a csúcsok	8
a csúcsoktól 1/4 testátlónyira levő pontok	8
a középpont	1

25. A Q csoportban j és k melyik valódi K részcsoport szerint vannak ugyanabban a bal oldali mellékosztályban?

$K = \{1, i, -1, -i\}$.

26. Mekkora a tf és a tf^4 által generált H részcsoport indexe D_7-ben?

$|D_7 : H| = 1$

27. Adjuk meg S_8 egy kételemű generátorrendszerét.

(12), (12345678).

28. Adjuk meg $\mathbb{Z}_9^\times$-nek egy olyan B részcsoportját, mely $A = \{1, 8\}$-cal együtt a csoport direkt felbontását adja.

$B = \{1, 4, 7\}$.

29. Hány kételemű részcsoportja lehet egy hatelemű csoportnak?

1 (a ciklikusnak) vagy 3 (a diédernek).

30. Mely 120 elemű Abel-csoportoknak van 12 rendű eleme? Izomorfia erejéig mindegyiket csak egyszer soroljuk fel.

$\mathbb{Z}_8^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_5^+$, $\quad \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_5^+$.

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra2: 1. vizsga (keresztfélév)/5** *2009. dec. 22.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **A négyelemű csoportok osztályozása.** A felhasznált tételeket nem kell precízen kimondani, sem bizonyítani, de egyértelműen hivatkozni kell rájuk.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5