NÉV: ________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra2: 4. vizsga (keresztfélév)/1** *2010. jan. 26.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* $7-7$ *pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.*

1. Legyen V a sík, és az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda(a,b) = (\lambda a, b)$. Írjuk fel **egy** olyan vektortéraxiómát, és ahhoz egy **konkrét helyettesítést,** ami nem teljesül.

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy azok a polinomok, melyeknek gyöke az 1 vagy a 2, nem alkotnak alteret $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött.

3. Legyen V azon legfeljebb ötödfokú polinomok altere $\mathbb{Q}[x]$-ben, melyeknek gyöke a 3 és a 4. Mely n egészekre igaz, hogy V-nek van $\mathbb{Q}^n$-nel izomorf altere?

$n \in \{ \qquad \}$

4. Legyen W az $x+y+z=0$ egyenlettel megadott sík a térben. Adjunk meg egy olyan kétdimenziós U alteret a térben, melyre $U \cap W$ egydimenziós.

5. Egy V vektortérben van egy 13 elemű összefüggő generátorrendszer, valamint egy 9 elemű független rendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$\dim V \in \{ \qquad \}$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött egy háromelemű, 2 rangú vektorrendszert.

7. Adjuk meg $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ felett az $A(z) = z/i$ transzformáció mátrixát az $i-1$, 1 bázisban.

8. Legyenek A és B lineáris transzformációk $\mathbb{R}[x]$-en $\mathbb{R}$ fölött. Ha $A(x-1) = x-1$ és $B(1-x) = x$, akkor mennyi $(BA)(3x-3)$?

$(BA)(3x-3) =$

9–10. Az alábbi levezetésben A lineáris transzformáció egy V vektortéren, λ, μ skalárok, és $v \in V$. Azt igazoljuk, hogy λA skalárszoros-tartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az $1-6$ számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:

1) Lineáris leképezések összegének definíciója.
2) Lineáris leképezés skalárszorosának definíciója.
3) Vektortéraxióma.
4) A összegtartása.
5) A skalárszoros-tartása.
6) Testaxióma.

Pontozás: 0 vagy 1 hiba 2 pont, 2 hiba 1 pont, legalább 3 hiba 0 pont.

$$
\begin{aligned}
(\lambda A)(\mu v) &= \quad \square \\
\lambda\big(A(\mu v)\big) &= \quad \square \\
\lambda\Big(\mu\big(A(v)\big)\Big) &= \quad \square \\
(\lambda\mu)\big(A(v)\big) &= \quad \square \\
(\mu\lambda)\big(A(v)\big) &= \quad \square \\
\mu\Big(\lambda\big(A(v)\big)\Big) &= \quad \square \\
\mu\big((\lambda A)(v)\big)
\end{aligned}
$$

11. Legyen A a transzponálás a kétszer kettes valós mátrixok $\mathbb{R}$ feletti vektorterén. Mennyi A rangja?

$\rho(A) =$

12. A tér egy lineáris transzformációjának a rangja 1, és van kétdimenziós sajátaltere. Mi az ehhez tartozó sajátérték?

13. Adjunk meg egy **nem** diagonalizálható $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrixot, melynek determinánsa i.

$M =$

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja $x^2 - x + 1$.

15. Az $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(x-i)^4$. Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_M(x) =$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban $(kjk)^{2009}k^{-2}$ értékét.

$(kjk)^{2009}k^{-2} =$

17. Legyen A_1 a síkon az eltolás $(1,0)$ vektorral, A_2 pedig az eltolás $(0,2)$ vektorral. Mennyi $A_1 \circ A_2$ rendje a sík egybevágóságainak csoportjában?

18. Ha g csoportelem és g^{10} rendje 30, akkor mennyi g rendje?

$o(g) =$

19. Számítsuk ki a D_8 diédercsoportban az $(f^{-7}t)^{100}ft$ rendjét.

$(f^{-7}t)^{100}ft$ rendje

20. Adjuk meg az $(123)(2345)(456)$ permutáció rendjét és előjelét.

21. Hány 20 rendű elem van a $\mathbb{Z}_{60}^{\times}$ csoportban?

22. Adjuk meg $\mathbb{Z}_{512}^{+}$ összes 4 rendű elemét.

23. Hány elemű A_8-ban a 2 pályája?

24. Hány szimmetriája van egy szabályos hatszög alapú egyenes hasábnak?

25. Legyen G a komplex számsíkon az origó körüli forgatások csoportja. Az $5(\cos 20° + i \sin 20°)$, $25i$, $5i$, $3+4i$ pontok közül melyek vannak G ugyanazon pályáján?

26. Az A_4 csoportban (123) és (124) melyik valódi K részcsoport szerint vannak ugyanabban a **jobb** oldali mellékosztályban?

$K =$

27. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$ csoport egy kételemű generátorrendszerét.

28. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_6^+$ csoport összes negyedrendű elemét.

29. Mely 6 elemű csoportoknak van legalább 3 másodrendű eleme?

30. Ha felbontjuk a $\mathbb{Z}_{24}^{\times}$ csoportot a véges Abel-csoportok alaptételének megfelelően, akkor milyen rendű tényezőkből hány keletkezik?

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra2: 4. vizsga (keresztfélév)/5** *2010. jan. 26.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel precíz kimondása* 1, *a teljes bizonyításának leírása további* 3 *pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **Dimenziótétel.** (Összefüggés a képtér és magtér dimenziója között bizonyos feltételek fennállása esetén.)

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14*. A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5