

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra2: 3. vizsga (keresztfélév)/1

2009. jan. 19.

I. rész (75 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első 15 és az utolsó 15 kérdésből egyaránt elért legalább 7 – 7 pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.

1. Legyen $V = \mathbb{R}[x]$, és az \mathbb{R} elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda p(x) = p(x)$. Írjuk fel **egy** olyan vektortéraxiómát, és ahhoz egy **konkrét helyettesítést**, ami nem teljesül.

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy azok a mátrixok, melyek főátlójában az elemek előjele egyenlő, nem alkotnak alteret $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben \mathbb{R} fölött.

3. Legyen V azon polinomok altere $\mathbb{Q}[x]$ -ben, melyeknek gyöke a 3 és a 4. Adjunk meg V -ben egy olyan alteret, amely izomorf \mathbb{Q}^3 -nel.

4. Adjunk példát arra, hogy egy altérnek két különböző direkt kiegészítő altere is lehet.

5. Egy V vektortérben van egy 13-dimenziós valódi altér, valamint egy 18 elemű, lineárisan független generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$\dim V \in \{ \quad \quad \quad \}$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$ -ben \mathbb{R} fölött egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek mindegyik elemét ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként.

7. Adjuk meg \mathbb{C} -ben \mathbb{R} felett az $A(z) = zi$ transzformáció mátrixát az $i, 1 + i$ bázisban.

8. Legyenek A és B lineáris transzformációk $\mathbb{R}[x]$ -en \mathbb{R} fölött.
Ha $A(x - 1) = x - 1$ és $B(1 - x) = x$, akkor mennyi
 $(A - B)(3x - 3)$?

$$(A - B)(3x - 3) =$$

- 9–10. Az alábbi levezetésben A lineáris transzformáció egy V vektortéren, λ skalár, és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy λA összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az 1–5 számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:

- 1) Lineáris leképezés skalárszorosának definíciója.
- 2) A összegtartása.
- 3) A skalárszoros-tartása.
- 4) Vektortéraxióma.
- 5) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 hiba 2 pont, 1 hiba 1 pont, legalább két hiba 0 pont.

$$(\lambda A)(v + w) =$$

$$\lambda(A(v + w)) =$$

$$\lambda(A(v) + A(w)) =$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(A(w)) =$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda A)(w)$$

11. Legyen A a térben egy origón átmenő síkra való merőleges vetítés. Mennyi A rangja?

$$\rho(A) =$$

12. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek egy kétdimenziós és egy egydimenziós sajátaltère van.

13. A sík egy lineáris transzformációjának sajátértékei 2 és 3.
Mennyi a determinánsa?

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja $x^2 + 1$.

15. Az $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ **nem** diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja x^4 . Mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$$m_M(x) =$$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban $(ji)^{2009}k^{-2}$ értékét.

$$(ji)^{2009}k^{-2} =$$

17. Adjunk meg a sík egybevágóságainak csoportjában A_1 és A_2 másodrendű elemeket, melyek szorzatának rendje 6.

18. Ha $g \in G$ rendje 100, akkor mennyi g^{80} rendje?

$$o(g^{80}) =$$

19. Számítsuk ki a D_8 diédercsoportban az $f^{-7}tf^{30}t$ rendjét.

$$f^{-7}tf^{30}t \text{ rendje}$$

20. Adjuk meg az $(1234)(2345)(3456)$ permutáció rendjét és előjelét.

21. Adjunk meg egy olyan ciklikus csoportot, melynek pontosan 10 részcsoporthja van.

22. Adjuk meg \mathbb{Z}_{1024}^+ összes 4 elemű részcsoporthját.

23. Hány elemű A_5 -ben a 2 stabilizátora?

24. Hány szimmetriája van egy négyzet alapú egyenes csonkagúlának?

25. Legyen G a síkon az x -tengellyel párhuzamos eltolások csoportja. Az $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ pontok közül melyek vannak G ugyanazon pályáján?

26. Az S_4 csoportban (13) és (124) melyik négyelemű K részcsoporthoz szerint vannak ugyanabban a **jobb** oldali mellékosztályban?

$K =$

27. Adjuk meg a (ciklikus) \mathbb{Z}_{18}^\times csoport egy generátorelemét, és írjuk is föl sorban a hatványait.

28. Adjuk meg $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ -nak egy kételemű generátorrendszerét.

29. Mely 8 elemű csoportoknak van legalább 4 negyedrendű eleme?

30. Bontsuk fel a $\mathbb{Z}_{18}^+ \times \mathbb{Z}_{90}^+$ csoportot a véges Abel-csoportok alaptételének megfelelően. Milyen rendű tényezőkből hány keletkezik?

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra2: 3. vizsga (keresztfélév)/5

2009. jan. 19.

II. rész (30 perc). Az alábbi tétel teljes bizonyításának leírása összesen 4 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a **nevét** és az **ELTE-azonosítóját** nyomtatott nagybetűkkel.

31. **Két bal oldali mellékosztály vagy egyenlő, vagy diszjunkt.** Lagrange tételét sem kimondani, sem bizonyítani nem kell.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a 6 pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított S összpontszáma kisebb, mint 14. A többiek osztályzata:

	<i>Osztályzat</i>
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5