

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra2: 2. vizsga (keresztfélév)/1

2010. jan. 5.

I. rész (75 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első 15 és az utolsó 15 kérdésből egyaránt elért legalább 7 – 7 pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.

1. Legyen V a sík vektorainak csoportja az összeadásra, és az \mathbb{R} elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda(a, b) = (\lambda a, 2\lambda b)$. Írjuk fel az(oka)t a vektortéraxiómá(ka)t, amely(ek) nem teljesül(nek).

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy azok a mátrixok, melyek főátlójában az elemek összege páros egész, nem alkotnak alteret $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben \mathbb{R} fölött.

3. Adjunk meg $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ -ban egy olyan alteret, amely izomorf \mathbb{R}^4 -el.

4. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemeiből álló \mathbb{R} fölötti vektortér, és W azon polinomok altere, melyeknek gyöke a 3. Adjuk meg V -ben W egy direkt kiegészítő alterét.

5. Egy V vektortérben van egy 13-dimenziós valódi altér, valamint egy 18 elemű, lineárisan összefüggő generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

$\dim V \in \{ \quad \quad \quad \}$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$ -ben \mathbb{R} fölött egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek egyik elemét ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként, de a másik kettőt nem.

7. Adjuk meg \mathbb{C} -ben \mathbb{R} felett az $A(z) = z/i$ transzformáció mátrixát az $1 - i, 1 + i$ bázisban.

8. Legyenek A és B lineáris transzformációk $\mathbb{R}[x]$ -en \mathbb{R} fölött.
Ha $A(x-1) = x+1$ és $B(1-x) = x-1$, akkor mennyi
 $(A-B)(2x-2)$?

$$(A-B)(2x-2) =$$

- 9–10. Az alábbi levezetésben A és B lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v, w \in V$. Azt igazoljuk, hogy AB összegtartó. Mindegyik egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az 1–6 számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:

- 1) Lineáris leképezések összegének definíciója.
- 2) A összegtartása.
- 3) B összegtartása.
- 4) A vektortéraxiómák egyszerű következménye.
- 5) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
- 6) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 hiba 2 pont, 1 hiba 1 pont, legalább két hiba 0 pont.

$$(AB)(v+w) =$$

$$A(B(v+w)) =$$

$$A(B(v)) + B(w) =$$

$$A(B(v)) + A(B(w)) =$$

$$(AB)(v) + (AB)(w)$$

11. Legyen A a deriválás a legfeljebb tizedfokú polinomok vektortéren. Mennyi A rangja?

$$\rho(A) =$$

12. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek létezik háromdimenziós sajátaltère.

13. Adjunk meg egy $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -beli nem diagonalizálható mátrixot, melynek determinánsa $2i$.

$$\text{Pl. } M =$$

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja $x^2 - 1$.

15. Az $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrix minimálpolinomja x^2 . Mi a karakterisztikus polinomja?

$$k_M(x) =$$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban $(kj)^{2009}i^{-1}$ értékét.

$$(kj)^{2009}i^{-1} =$$

17. Adjunk meg a sík egybevágóságainak csoportjában A_1 és A_2 másodrendű elemeket, melyek szorzatának rendje végtelen.

18. Ha G kommutatív csoport, és g_1, g_2 másodrendű elemei, akkor mik g_1g_2 rendjének lehetséges értékei?

19. Számítsuk ki a D_8 diédercsoportban az $f^{-2}tf^{40}t$ rendjét.

$$f^{-2}tf^{40}t \text{ rendje}$$

20. Adjuk meg A_{10} egy 8 rendű elemét.

21. Hány 48 rendű elem van egy 31300000000 elemű ciklikus csoportban?

$$48 \text{ rendű elemek száma} =$$

22. Adjuk meg \mathbb{Z}_{72}^+ összes négyelemű részcsoportját.

23. Hány elemű a kocka szimmetriacsoportjában egy testátlót harmadoló pont stabilizátora?

24. Hány pályája van egy négyzet alapú egyenes csonkagúla szimmetriacsoportjának a csúcsok 8 elemű halmazán, és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei:

A pálya elemszáma:

25. Az S_4 csoportban (234) és (12) melyik négyelemű K részcsoporthoz tartoznak ugyanabban a bal oldali mellékosztályban?

$K =$

26. Mekkora a tf és a tf^5 által generált H részcsoporthoz tartoznak ugyanabban a D_8 -ban?

$|D_8 : H| =$

27. Adjuk meg \mathbb{Z}_{16}^\times egy kételemű generátorrendszerét.

28. Adjuk meg \mathbb{Z}_{20}^+ -nak egy olyan B részcsoporthoz tartozóját, mely $A = \{0, 5, 10, 15\}$ -tel együtt a csoport direkt felbontását adja.

$B =$

29. Mely 8 elemű csoportoknak van legalább 5 másodrendű eleme?

30. Bontsuk fel a $\mathbb{Z}_6^+ \times \mathbb{Z}_{12}^+$ csoportot a véges Abel-csoportok alaptételének megfelelően. Milyen rendű tényezőkből hány keletkezik?

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

Mat. BSc.

Algebra2: 2. vizsga (keresztfélév)/5

2010. jan. 5.

II. rész (30 perc). Az alábbi tétel teljes bizonyításának leírása összesen 4 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a nevét és az ELTE-azonosítóját nyomtatott nagybetűkkel.

31. **Egy független rendszer elemszáma legfeljebb akkora, mint egy generátorrendszeré.** A felhasznált segédteteleket nem kell kimondani, sem bizonyítani, de egyértelműen hivatkozni kell rájuk. **Kivétel:** aki nem a lineáris egyenletrendszeres bizonyítást írja le, hanem a kicserélési tételt használja, annak a kicserélési tételt is be kell bizonyítania (ennek precíz kimondásáért 1 pont jár).

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a 6 pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított S összpontszáma kisebb, mint 14. A többiek osztályzata:

	<i>Osztályzat</i>
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5