NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. BSc. **Algebra2: 1. vizsga (keresztfélév)/1** *2009. dec. 22.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. A legalább elégséges osztályzat elégséges feltétele az első* 15 *és az utolsó* 15 *kérdésből egyaránt elért legalább* $7-7$ *pont. A pontos osztályzási algoritmus a vizsgatematikában volt olvasható.*

1. Legyen V a D_4 diédercsoport, és az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzás definíciója $\lambda v = id$ minden esetben. Írjuk fel az(oka)t a vektortéraxiómá(ka)t, amely(ek) V-ben nem teljesül(nek).

2. Adjunk példát, ami mutatja, hogy a hárommal osztható fokú polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben a nullapolinommal együtt nem alkotnak alteret $\mathbb{R}$ fölött.

3. Legyen V a kétszer kettes, valós, diagonális mátixok vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Adjunk meg egy háromdimenziós alteret $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, melynek V-vel vett összege $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

4. Adjunk meg a térben az $(x, x, 0)$ $(x \in \mathbb{R})$ pontokból álló egyeneshez egy direkt kiegészítő alteret.

5. Egy V vektortérben van egy 13-dimenziós valódi altér, valamint egy 18 elemű, lineárisan összefüggő, 15 rangú generátorrendszer. Mik $\dim V$ lehetséges értékei?

   $\dim V \in \{ \qquad \}$

6. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-ben $\mathbb{R}$ fölött egy olyan háromelemű vektorrendszert, amelynek két elemét ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként, de a harmadikat nem.

7. Adjuk meg $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ felett az $A(z) = z/i$ transzformáció mátrixát az $i, 1$ bázisban (a sorrend lényeges!).

8. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött. Az identitás kétszeresének ellentettje hová viszi a $(-3, 4)$ pontot?

9–10. Az alábbi levezetésben A, B, C lineáris transzformációk egy V vektortéren és $v \in V$, az egyik disztributivitást igazoljuk. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az $1-5$ számok egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A számok jelentése:

1) Lineáris leképezések összegének definíciója.
2) Lineáris leképezések szorzatának definíciója.
3) Lineáris leképezés összegtartása.
4) A vektortéraxiómák közvetlen következménye.
5) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 0 hiba 2 pont, 1 hiba 1 pont, legalább két hiba 0 pont.

$$\begin{aligned} (AC+BC)(v) &= \quad \square \\ (AC)(v)+(BC)(v) &= \quad \square \\ A\big(C(v)\big)+B\big(C(v)\big) &= \quad \square \\ (A+B)\big(C(v)\big) &= \quad \square \\ \big((A+B)C\big)(v) & \end{aligned}$$

11. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jobb oldali nullosztó. Mik a rangjának lehetséges értékei?

$\rho(M) =$

12. Soroljuk föl a térben egy origót tartalmazó egyenes körüli 60 fokos forgatás (valós) sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltér dimenzióját.

Sajátértékek:
Sajátalterek dimenziói:

13. Adjunk meg egy $\mathbb{C}^{2\times 2}$-beli nem diagonalizálható mátrixot, melynek determinánsa 2.

Pl. $M =$

14. Adjunk meg a síkon egy transzformációt, melynek minimálpolinomja $x-3$.

15. Az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2+x+1)^2$. Ha M komplex fölött sem diagonalizálható, akkor mik a minimálpolinom lehetséges értékei?

$m_M(x) =$

16. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a $jkik^{-1}j$ szorzatot.

$jkik^{-1}j =$

17. Adjunk meg a sík egybevágóságainak csoportjában F_1 és F_2 végtelen rendű elemeket, melyek szorzatának rendje 2.

18. Adjuk meg A_9 egy 10 rendű elemét.

19. Számítsuk ki a D_7 diédercsoportban az $f^{-2}tf^{43}t$ rendjét.

$f^{-2}tf^{43}t$ rendje

20. Ha a g csoportelem rendje 3000, mennyi lesz g^{200} rendje?

$o(g^{200}) =$

21. Hány 24 rendű elem van egy 31200000000 elemű ciklikus csoportban?

24 rendű elemek száma =

22. Hány részcsoportja van a 72 elemű ciklikus csoportnak?

Részcsoportok száma =

23. Soroljuk fel a szabályos hatszög szimmetriacsoportjában az egyik élközéppont stabilizátorának összes elemét.

24. Hány pályája van a kocka szimmetriacsoportjának a testátlókat negyedelő pontok 17 elemű halmazán (a csúcsokat is belevéve), és mennyi ezek elemszáma?

A pálya elemei: A pálya elemszáma:

25. A Q csoportban j és k melyik valódi K részcsoport szerint vannak ugyanabban a bal oldali mellékosztályban?

$K =$

26. Mekkora a tf és a tf^4 által generált H részcsoport indexe D_7-ben?

$\lvert D_7 : H\rvert =$

27. Adjuk meg S_8 egy kételemű generátorrendszerét.

28. Adjuk meg $\mathbb{Z}_9^\times$-nek egy olyan B részcsoportját, mely $A = \{1, 8\}$-cal együtt a csoport direkt felbontását adja.

$B =$

29. Hány kételemű részcsoportja lehet egy hatelemű csoportnak?

30. Mely 120 elemű Abel-csoportoknak van 12 rendű eleme? Izomorfia erejéig mindegyiket csak egyszer soroljuk fel.

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. BSc. **Algebra2: 1. vizsga (keresztfélév)/5** *2009. dec. 22.*

II. rész (30 perc). *Az alábbi tétel helyes kimondása és a teljes bizonyítás leírása összesen 4 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja, kérjük, hogy a fenti helyre írja rá a* **nevét** *és az* **ELTE-azonosítóját** *nyomtatott nagybetűkkel.*

31. **A négyelemű csoportok osztályozása.** A felhasznált tételeket nem kell precízen kimondani, sem bizonyítani, de egyértelműen hivatkozni kell rájuk.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarész első és utolsó 15 *kérdéscsoportjának valamelyikéből nincs meg a* 6 *pontja, továbbá az is, akinek a második résszel együtt számított* S *összpontszáma kisebb, mint* 14. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$S \leq 17$	2
$18 \leq S \leq 21$	3
$22 \leq S \leq 25$	4
$26 \leq S \leq 34$	5