Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Nyolcadik feladatsor (2009. november 11–12)

4.4.25. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az S_3, $\mathbb{Z}_{12}^{+}$ és a $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$ csoportok összes részcsoportját, valamint az A_4 alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját.*

4.4.15. *Adjuk meg az S_3 szimmetrikus csoportban a $H = \{id, (12)\}$ részcsoport szerinti bal és jobb oldali mellékosztályokat, és igazoljuk, hogy $(123)H \neq H(123)$. Számítsuk ki az (123) által generált részcsoport szerinti mellékosztályokat is.*

4.4.17. *Jelölje $n\mathbb{Z}^{+}$ az n-nel osztható egészekből álló részcsoportot $\mathbb{Z}^{+}$-ban. Igazoljuk, hogy $|\mathbb{Z}^{+} : n\mathbb{Z}^{+}| = n$.*

4.4.26. *Mutassuk meg, hogy a sík, illetve a körvonal egybevágósági transzformációinak csoportjában is a mozgások részcsoportjának indexe 2.*

4.6.11. *Határozzuk meg a G csoportban a $\langle X \rangle$ részcsoportot.*
a) $G = \mathbb{Z}^{+}$, $X = \{28, 34\}$.
b) $G = S_n$, $X = \{(12), (1, 2, \ldots, n)\}$.
c) $G = S_4$, $X = \{(13), (1234)\}$.

4.6.12. *Mutassuk meg, hogy a D_n diédercsoportot generálják az f és t elemek. Határozzuk meg a D_5 és D_6 diédercsoportokban a $\langle t, f^2 \rangle$ részcsoportot.*

4.3.28. *Az $\mathbb{R}^{\times}$, az $\mathbb{R}^{+}$ és a $\mathbb{C}^{\times}$ csoportok között van-e izomorf?*

4.5.16. *Mutassuk meg, hogy a D_3 diédercsoport izomorf az S_3 szimmetrikus csoporttal.*

4.5.22. *Mutassuk meg, hogy a D_4 és a Q csoportok nem izomorfak.*

4.5.25. *Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük: $\mathbb{Z}_2^{+}$, $\mathbb{Z}_3^{+}$, $\mathbb{Z}_4^{+}$, $\mathbb{Z}_8^{+}$, $\mathbb{Z}_3^{\times}$, $\mathbb{Z}_5^{\times}$, $\mathbb{Z}_6^{\times}$, $\mathbb{Z}_8^{\times}$, $\mathbb{Z}_{12}^{\times}$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q (a kvaterniócsoport), $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.*

4.5.35. *Legyen $n \geq 3$ és H az A_n alternáló csoport azon elemeinek halmaza, melyek az 1-et fixen hagyják. Igazoljuk, hogy H részcsoport, amely A_{n-1}-gyel izomorf.*

4.4.30. *Legyen H részcsoportja a G csoportnak és $g \in G$. Igazoljuk, hogy a gHg^{-1} komplexusszorzat is részcsoport (ez a H-nak a g-vel vett konjugáltja), mely H-val izomorf.*

IHF. *Van-e $\mathbb{Z}_{24}^{\times}$-ben 4, illetve 6 elemű nem ciklikus részcsoport?*