Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Hetedik feladatsor (2009. november 4–5)

4.3.29. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m^+$ és $\mathbb{Z}_m^\times$ csoportok elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7$, 8, 12.*

4.3.30. *Határozzuk meg a g elem rendjét a G csoportban, ha $G = \mathbb{R}^+$, $g = -1$; $G = \mathbb{R}^\times$, $g = -1$; $G = \mathbb{Z}_{19}^+$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{19}^\times$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{32}^+$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{32}^\times$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^+$, $g = x + 1$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^\times$, $g = 5$.*

4.3.11. *Mi a sík egybevágósági transzformációinak a rendje? Mik az elemrendek a kvaterniócsoportban?*

4.3.32. *Hány n hosszú ciklus van S_n-ben?*

4.3.33. *Hány 2, 3, 4, 5, 6, illetve 12 rendű elem van A_7-ben?*

4.3.39. *Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű, fölcserélhető elemei egy csoportnak, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

4.3.40. *Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G kommutatív. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

4.3.41*. *Mutassuk meg, hogy $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ (a, n, m pozitív egész).*

4.3.34. *Igazoljuk, hogy ha egy g csoportelem rendje n, és $m \mid n$, akkor $o\big(g^{n/m}\big) = m$. Legyen G csoport, amelynek elemszáma véges, és legalább kettő. Mutassuk meg, hogy G-ben van prímrendű elem.*

4.3.21. *Ciklikus-e a $\mathbb{Z}_{17}^\times$ csoport?*

4.3.18. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}^+$ és a $\mathbb{Z}_{12}^+$ csoportok összes generátorelemét.*

IHF. *Adjuk meg $\mathbb{Z}_{24}^\times$ elemeinek rendjét.*

Gyakorló feladatok

4.3.36. *Legyen g egy n-edrendű eleme a G csoportnak és $g = h^m$, ahol $m \mid n$. Határozzuk meg h rendjét.*

4.3.37. *Igaz-e tetszőleges G csoportban, hogy ha G-ben van d rendű elem, akkor ezek száma legalább $\varphi(d)$? És az, hogy pontosan $\varphi(d)$?*

4.3.38. *Mutassuk meg, hogy a 3-hatványadik komplex egységgyökök csoportot alkotnak a szorzásra. Ciklikus-e ez a csoport?*

4.4.32*. *Igazoljuk, hogy egy véges csoport rendje pontosan akkor páros, ha van másodrendű eleme.*

2.2.8. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges műveletre nézve legfeljebb egy neutrális elem lehet.*

2.2.10. *Igazoljuk, hogy asszociatív műveletnél minden elemnek csak egy inverze lehet.*

4.1.1. *Mutassuk meg, hogy minden csoportban érvényes az* **egyszerűsítési szabály**, *vagyis az $ag = bg$, illetve $ga = gb$ egyenlőségek bármelyikéből $a = b$ következik.*