Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Hatodik feladatsor (2009. október 21-22)

4.2.4. *Számítsuk ki az $f \circ g$ és $g \circ f$ kompozíciókat, ahol*

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mely $n \geq 1$ egészekre lesz S_n kommutatív (vagyis Abel-csoport)?

4.2.18. *Mutassuk meg, hogy $(123) = (231)$, sőt általában egy ciklust bármelyik eleménél kezdve ugyanazt a permutációt kapjuk.*

4.2.25, 4.3.31. *Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35), \quad (12345)(234)(12345)^{-1}, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz „hátulról előre" permutációjával is.

4.2.23. *Bizonyítsuk be, hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$, illetve hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_kx_1)(x_{k-1}x_1)\ldots(x_3x_1)(x_2x_1)$.*

4.2.26. *Legyen $f = (12)(345)$. Hány különböző hatványa van ennek a permutációnak? Melyik a legkisebb hatványa, ami az egységelemet adja? Mely k és ℓ egészekre lesz $f^k = f^\ell$?*

4.8.14. *Mutassuk meg, hogy ha $(x_1 \ldots x_k)$ egy ciklus az S_n csoportban, és $f \in S_n$, akkor $f \circ \big(x_1 \ldots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$.*

4.2.31*. *Mely $f \in S_n$ permutációk cserélhetők föl az $(1, 2, \ldots, n)$ ciklussal?*

4.2.34*. *Mutassuk meg, hogy S_n valamennyi eleme előáll legfeljebb $n-1$ darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez $n-1$ transzpozíciónál kevesebb nem elegendő?*

4.2.27. *Rendezhetők-e a könyvek a könyvespolcon úgy, hogy csak szomszédos (helyen lévő) könyvek cseréjét engedjük meg?*

4.2.30*. *Igazoljuk, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.*

4.1.15. *Ha f és g transzformációk, milyen kapcsolatban állnak f és gfg^{-1} fixpontjai?*

4.1.36. *Tegyük föl, hogy f és g fölcserélhető transzformációk az X halmazon. Mutassuk meg, hogy f a g fixpontjainak halmazát önmagára képzi.*

4.1.37. *Mikor fölcserélhető két egyenesre tükrözés a síkon?*

4.1.23. *Igazoljuk a $tft^{-1} = f^{-1}$ összefüggést, ahol t tengelyes tükrözés egy origón átmenő egyenesre, f pedig egy origó körüli forgatás.*

4.1.16. *Legyen r a $\overrightarrow{PP'}$ eltolás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor grg^{-1} a $\overrightarrow{g(P)g(P')}$ eltolás.*

4.1.17. *Legyen t az e egyenesre való tükrözés. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gtg^{-1} a $g(e)$ egyenesre való tükrözés.*

4.1.18. *Legyen f a P pont körüli α szögű forgatás a síkon és g egybevágóság. Igazoljuk, hogy gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként.*