Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Ötödik alkalom (2009. október 7-15)

1. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk determinánsát.*
a) *A síkon az $y = x$ egyenesre való tükrözés.*
b) *A síkon az origó körüli $+90$ fokos forgatás.*
d) *A térben a z tengely körüli $+120$ fokos forgatás.*
e) *A térben az yz síkra való tükrözés, illetve vetítés.*

2. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-alakját.*
a) *Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix n-edik hatványát.
b) *A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.*
IHF *A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.*

3. *Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.*

4. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?*

5. *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.*

6. *Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.*

7. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

---

8. *Milyen kapcsolatban állnak az M karakterisztikus polinomjának együtthatói M nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha M-nek n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az M nyoma, szorzatuk az M determinánsa.*

9. *Melyek igazak az alábbi állítások közül?*
a) *Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.*
b) *Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.*
c) *Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.*

10. *Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátalterek összege az egész tér?*

11*. *Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n\times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.*