Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat

Negyedik alkalom (2009. szeptember 30 – október 1)

1. *Legyen A az függvény a síkon, amely az (x, y) pontot a*
a) $(2x + 3y + c, dx - y)$, *illetve a*
b) $(2x - 3y, xy + e)$
pontba viszi. A c, d, e valós számok mely értékeire kapunk lineáris leképezést?

2. *Tekintsük az alábbi lineáris transzformációkat.*
a) T a síkon az $y = x$ egyenesre való tükrözés.
b) F a síkon az origó körüli $+90$ fokos forgatás.
Számítsuk ki, hová viszi az $F+T$ transzformáció az (x, y) pontot. Lineárisan függetlenek-e a T, F, FT, TF transzformációk? Hány dimenziós alteret generálnak az F pozitív kitevőjű hatványai?

3. *Legyen M az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan K és L nem nulla, kétszer kettes valós mátrixokat, melyekre $KM = 0 = ML$.*

4. *Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1, 1)$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér, és határozzuk meg a dimenzióját.*

5. *Igazoljuk lineáris transzformációkra az $A(B + C) = AB + AC$ disztributív szabályt.*

6. *Legyenek $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(AB) \supseteq \mathrm{Ker}(B)$ és $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$. (Emlékeztető: $r(C) = \dim \mathrm{Im}(C)$).*

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha A és B lineáris leképzések, melyekre $A + B$ értelmes, akkor $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$, és ezért $r(A + B) \le r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.*

IHF. *Legyen A a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, és B az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1, 2, 3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $A \circ B = B \circ A$?*

---

8. *Határozzuk meg az $\{x^2 + 2x + 2,\ 2x^2 - 3x + 6,\ 3x^2 - 8x + 10\}$ polinomrendszer rangját.*

9. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők? Általánítsuk a megoldást magasabb dimenzióra.*

11. *A Fibonacci-sorozatot az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ rekurzió definiálja.*
a) Igazoljuk, hogy az $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ rekurziónak eleget tevő sorozatok alteret alkotnak a sorozatok vektorterében. Hány dimenziós ez az altér?
b) Keressünk ebben az altérben mértani sorozatokat.
b) Adjunk explicit képletet a Fibonacci-sorozat általános elemére mértani sorozatok lineáris kombinációja segítségével.

12*. *Legyen A egy $n \times n$-es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy $A^n = 0$.*