**Bsc algebra2 keresztféléves gyakorlat**

*Harmadik alkalom (2009. szeptember 23-24)*

**1.** *Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban, határozzuk meg a kép- és magterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.*

*a) $V_1$ és $V_2$ a sík $\mathbb{R}$ felett, $A$ egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli $\alpha$ szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (-1, 1)$ bázisban.*

*b) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, $A$ az $1 + i$ számmal való szorzás.*

*c) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A$ az $1 + i$ számmal való szorzás.*

*d) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a $v$ komponenseinek az összege.*

*e) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A$ a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).*

*f) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$.*

*g) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb $n$-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).*

**2.** *Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban $M$, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

**3.** *Az alábbi $M$ mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, valamint rangját.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.** *Legyen $W$ a $V$ véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy $V$-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek $W$ a magtere, illetve a képtere.*

**IHF.** *Az $A$ transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az $A$ mátrixát az $(1, 1)$, $(1, 2)$ bázisban, és az $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1, 1)/\sqrt{2}$ bázisban is.*

---

**5.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?*

**6.** *Mutassuk meg, hogy ha $A$ idempotens lineáris transzformáció a $V$ vektortéren, azaz $A^2 = A$, akkor $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = V$. Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.*

**7.** *Egy $A$ lineáris transzformáció nilpotens, ha van olyan $n$ pozitív egész, hogy $A^n = 0$ Bizonyítsuk be, hogy ha az $A$ és $B$ nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $AB = BA$), akkor $A + B$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?*

További gyakorlásul a Freud-könyv negyedik és ötödik fejezetének feladatait javaslom, leginkább ezeket: 4.2.7, 4.2.12, 5.1.15, 5.3.4, 5.4.3, 5.6.19, 5.7.7, 5.7.8, 5.8.3, 5.8.7.