

Bsc algebra2 keresztfélèves gyakorlat

Tizedik, utolsó feladatsor (2009. november 25–∞)

4.9.3. Adjunk meg egy izomorfizmust $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ és \mathbb{Z}_6^+ között. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ nem izomorf \mathbb{Z}_4^+ -gyel. A felsorolt csoportok közül izomorf-e valamelyik a Klein-csoporttal?

4.9.22. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoport összes negyedrendű elemét.

4.9.23. Mutassuk meg az elemek rendjeinek kiszámításával, hogy a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ és a $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoportok nem izomorfak.

4.9.24. A véges Abel-csoportok alaptételének segítségével döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.

4.9.25. Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók föl direkt szorzatra, és igenlő válasz esetén adjunk meg egy ilyen felbontást: \mathbb{Z}_6^+ , \mathbb{Z}_8^+ , \mathbb{Z}^+ , \mathbb{Q}^+ , \mathbb{C}^+ , \mathbb{Z}_{15}^\times , \mathbb{Z}_{16}^\times .

4.9.26. Hányféleképpen bontható föl két nemtriviális részcsoportjának direkt szorzatára a $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ csoport?

4.9.32. Igazoljuk, hogy a kocka szimmetriacsoportja $S_4 \times \mathbb{Z}_2^+$ -szal izomorf.

4.9.13. Igazoljuk, hogy a gömb szimmetriacsoportja, azaz $O(3)$ izomorf az $SO(3)$ és a \mathbb{Z}_2^+ csoportok direkt szorzatával.

4.7.6, 4.7.7. Igazoljuk az alább megadott $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ leképezésekről, hogy homomorfizmusok, határozzuk meg a magjukat és a képüket.

a) $G_1 = \mathbb{Z}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(m)$ az m maradéka n -nel osztva.

b) $G_1 = GL(n, T)$, $G_2 = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

c) $G_1 = S_n$, $G_2 = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

d) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.

e) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$.

f) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (vagyis φ az i behelyettesítése).

IHF. Bontsuk föl a \mathbb{Z}_{11}^\times csoportot két prímszámú ciklikus részcsoport direkt szorzatára. Adjuk meg, hogy a \mathbb{Z}_{36}^\times csoport prímszámú ciklikusakra való felbontásában milyen rendű tényezők szerepelnek.