

Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Első alkalom (2009. szeptember 9–10)

1. Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?
 - a) $V = T[x]$ a T test felett, W a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.
 - b) $V = T[x]$ a T test felett, W a legfeljebb tizedfokú polinomok, és a zéruspolinom.
 - c) V a komplex számok vektortere \mathbb{R} illetve \mathbb{C} felett, és $W = \{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.
 - d) V a sík \mathbb{R} felett, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója.
 2. Igaz-e \mathbb{R} felett, hogy $x \in \langle x^2 - 1, x^2 - 2, 3x + 2 \rangle$? És $\langle x, x^2 + 2, x + 2 \rangle = \langle 1, x + 1, x^2 + 1 \rangle$?
 3. Legyen V a sík (helyvektorai), mint \mathbb{R} feletti vektortér.
 - a) Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?
 - b) Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.
 4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek? Mennyi a rangjuk?
 - a) Az \mathbb{R} feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x\}$, $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$.
 - b) Az \mathbb{R} feletti \mathbb{C} vektortérben tetszőleges három komplex szám.
 5. Igazoljuk az alábbiakat.
 - a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
 - b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.
 - c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.
 - d) Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.
 - 6*. Legyen V vektortér a T test felett. Mikor lesz két altér uniója is altér?
- IHF.** Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d -t.
-
7. Legyen W altere az \mathbb{R} feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u + 6v \in W$ és $3u + v \in W$. Következik-e ebből, hogy $u, v \in W$?
 8. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n -dimenziós V vektortérben?
 - a) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
 - b) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
 - c) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
 - d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - f) Ha F elemszáma n , és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
 - g) Ha G elemszáma n , és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
 - h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.
 - i) Van olyan $n + 1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.
 9. Hány altere van a \mathbb{Z}_2 test feletti \mathbb{Z}_2^2 és \mathbb{Z}_2^3 vektortereknek? És a \mathbb{Z}_7 feletti \mathbb{Z}_7^2 -nek?
 10. Legyen V vektortér a T test felett.
 - a) Mi az üres halmaz által generált altér?
 - b) Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.