Ciklikus csoport, rend, Lagrange-tétel

1. Döntsük el, az alábbi csoportok közül melyek lesznek ciklikusak:
a) $\mathbb{Z}^\times$; b) $\mathbb{Q}^+$; c) $\mathbb{Q}^\times$; d) $\mathbb{C}^+$; e) $\mathbb{Z}_7^\times$; f) $\mathbb{Z}_8^\times$; g) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$.

2*. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{C}^\times$ bármely véges részcsoportja ciklikus.

3. Határozzuk meg a lehetséges elemrendeket D_n-ben.

4. Hány hatodrendű elem van S_{10}-ben?

5. Mi lesz S_{12}-ben a maximális elemrend?

6. a) Van-e 12-edrendű elem S_6-ban? Hát S_7-ben?
b) Van-e 4-edendű elem D_6-ban?
c*) Van-e 3-adrendű elem $GL(2,\mathbb{Q})$-ban? Hát 5-ödrendű?

7. a) Igazoljuk, hogy ha $a, b \in G$ fölcserelhető elemek (azaz $ab = ba$), melyekre $o(a) = 2$ és $o(b) = 3$, akkor $o(ab) = 6$.
b) Igazoljuk általában, hogy ha $ab = ba$, és $(o(a), o(b)) = 1$, akkor $o(ab) = o(a)o(b)$. Mit mondhatunk ab rendjéről akkor, ha az a és b rendjének relatív prím voltát nem tesszük föl?
c) Mutassuk meg, hogy a sík két tükrözésének a szorzata akármilyen (esetleg végtelen) rendű is lehet. (Miért nem mond ez ellent az előző eredményeknek?)

8. Igazoljuk, hogy az n elemű ciklikus csoportban minden $d \mid n$-re pontosan egy d elemű részcsoport van.

9. Mutassuk meg, hogy ha egy G csoportban van n-edrendű elem, akkor minden $d \mid n$-re van legalább $\varphi(d)$ darab d-edrendű elem is.

10. Mutassuk meg, hogy ha egy 16 elemű csoportban van olyan g eleme, melyre $g^2 \neq g^{10}$, akkor a csoport ciklikus. Igaz marad-e a következtetés, ha a csoportnak 32 eleme van?

11. a) Igazoljuk, hogy $(2\ \dots\ n)(1\ 2)(2\ \dots\ n)^{-1} = (1\ 3)$.
b) Igazoljuk, hogy $(2\ \dots\ n)^i(1\ 2)(2\ \dots\ n)^{-i} = (1\ \ i+1)$.
c) Igazoljuk, hogy $\langle(2\ 3\ \dots\ n), (1\ i)\rangle = S_n$.
d) Igazoljuk, hogy $\langle(1\ 2\ \dots\ n), (1\ i)\rangle = S_n$.

12. Hány olyan τ transzpozíció van S_4-ben, melyre $\langle(1\ 2\ 3), \tau\rangle = S_4$? Változik-e ez a szám, ha τ-ról csak azt tesszük föl, hogy másodrendű?

13. A D_n diédercsoportban legyen f a $360°/n$ szögű forgatás, t pedig egy rögzített tükrözés. Igazoljuk, hogy $tf^it = f^{n-i}$, majd $n = 6$-ra határozzuk meg az $\langle f^4, tf^2\rangle$ elemszámát.

14. Igazoljuk, hogy ha $A, B \leq G$ véges részcsoportok, akkor az AB komplexusszorzat elemszámára teljesül, hogy $|AB| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.