Csoportok, szimmetrikus csoport, részcsoport

1. Ellenőrizzük, melyek alkotnak csoportot az alábbi halmazok közül a megadott műveletekre nézve:

a) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \mid a+b+c=d+e+f=0\right\}$, a mátrixösszeadásra nézve;

b) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid ad-bc \neq 0\right\}$, a mátrixszorzásra nézve;

c) $\left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A > 0\right\}$ a mátrixszorzásra nézve;

d) $\left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A = 0\right\}$ a mátrixszorzásra nézve;

e) az 1 abszolút értékű komplex számok a szorzásra nézve;

f) az 1 abszolút értékű komplex számok az összeadásra nézve;

g) a komplex egységgyökök a szorzásra nézve;

h) a 100-adik primitív egységgyökök a szorzásra nézve;

i) a sík elforgatásai a kompozícióra nézve;

j) a sík origó körüli elforgatásai a kompozícióra nézve.

2. Igazoljuk, hogy ha egy csoportban $ab = b$ valamely csoportelemekre, akkor $a \in G$ a csoport egységeleme. Következtessünk ebből arra, hogy egy részcsoport egységeleme szükségképpen megegyezik az egész csoport egységelemével.

3. Mutassuk meg, hogy ha egy csoportban tetszőleges a, b csoportelemekre igaz, hogy

a) $(ab)^2 = a^2b^2$, ill.

b) $a^2 = e$,

akkor a csoport kommutatív.

4. Hány különböző egybevágósága van egy egyenlő szárú háromszögnek, egy négyzettől különböző téglalapnak, egy körnek, illetve egy szabályos tetraédernek?

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b csoportelemekre $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

6. Adjuk meg az alábbi S_6-beli permutációk ciklusfölbontását:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\big((1\ 2)(3\ 2\ 4)(5\ 3\ 1)\big)^3$; e) $(1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2)$; f) $(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)$;

7. a) Igazoljuk, hogy S_n-ben minden permutáció előáll ún. *transzpozíciók* (azaz 2 hosszúságú ciklusok) szorzataként.

b) Igazoljuk, hogy S_n-ben minden permutáció előáll olyan transzpozíciók szorzataként is, amelyekben az egyik mozgatott elem az 1-es.

c*) Mutassuk meg, $n-2$ transzpozícióval már nem tudjuk S_n minden elemét előállítani szorzat alakban (azaz S_n nem generálható $n-2$ transzpozícióval).

8. Határozzuk meg az alábbi részcsoportokat:

a) $\langle 1\rangle \leq \mathbb{Z}_5^+$; b) $\langle 1\rangle \leq \mathbb{Z}_5^\times$; c) $\langle 6, -14\rangle \leq \mathbb{Z}^+$; d) $\langle 3\rangle \leq \mathbb{Z}_7^\times$; e) $\langle (2\ 3), (4\ 3\ 2)\rangle \leq S_4$.

9. Legyen D_6 a szabályos 6-szög egybevágóságainak csoportja, és jelölje ebben f a 6-szög középpontja körüli $60°$ fokos forgatást, t pedig egy tetszőleges szimmetriatengelyre való tükrözést.

a) Igazoljuk, hogy a D_6 tetszőleges eleme fölírható f^i vagy tf^i alakban ($i \in \{0, 1, \ldots, 5\}$).

b) Írjuk föl az előbbi alakban a tf^4t elemet.

c) Mutassuk meg, hogy $\left\{1, f^3, t, tf^3\right\}$ kommutatív részcsoport.

10. Számozzuk meg a 6-szög csúcsait rendre az $1, 2, \ldots, 6$ számokkal. Ekkor D_6 minden elemének hatását a csúcsokon vizsgálva kapunk egy S_6-beli permutációt. Mi lesz a tf^3-nek megfelelő permutáció, ha t-ről tudjuk, hogy megcseréli az 1-es és 2-es elemeket?