Diagonalizálás, hasonlóság, minimálpolinom

1. Döntsük el, melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Mutassuk meg, hogy bármely $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ lineáris transzformációnak van sajátértéke.

3. Mely mátrixoknak (transzformációknak) lesz elsőfokú a minimálpolinomja?

4. Legyen φ a sík $120°$-os elforgatása az origó körül. Mi lesz φ minimálpolinomja?

5. Mi lehet egy projekció minimálpolinomja? (Emlékeztetőül: φ projekció, ha $\varphi^2 = \varphi$.) Hát a karakterisztikus polinomja?

6. Igazoljuk, hogy ha egy $A \in T^{5\times 5}$-ös mátrixra A^{10}=0, akkor $A^5 = 0$.

7. Tegyük föl, hogy egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra teljesül, hogy $A^m = I$. Igazoljuk, hogy A diagonalizálható.

8. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Tegyük föl, hogy az alábbi öt állítás közül pontosan egy nem igaz:

a) $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) < 2$;
b) φ-nek van sajátvektora;
c) $\varphi^2 = \varphi$;
d) a 0 sajátértéke φ-nek;
e) $\mathbb{R}^2$-nek van olyan $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisa, hogy $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$.

Melyik állítás lehetett hamis?

9. Van-e olyan 2×2-es racionális együtthatós A mátrix, melyre $A^{100} = 2I$? Hát valós együtthatós?

10. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrixnak ugyanaz a minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött, mint $\mathbb{C}$ fölött.

11. Mutassuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül az első csoportbeliek mind hasonlók egymáshoz, a második csoporthoz tartozók közül pedig egyik sem hasonló a másikhoz.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.