Báziscsere. Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus polinom

1. Legyenek $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ a szokásos standard bázisvektorok $\mathbb{R}^2$-ben, és tekintsük a $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$, és $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ bázisokat. Legyen φ a sík 45°-os forgatása az origó körül, ρ pedig az x tengelyre való tükrözés. Adjuk meg az alábbi mátrixokat:

a) $[\varphi]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$; b) $[\varphi]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$; c) $[\varphi]_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3}$; d) $[\varphi]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$; e) $[\rho]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$; f) $[\rho]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}$.

2. Adjunk meg egy olyan 4×4-es valós A mátrixot, melyre $A^2 \neq 0$, de $A^3 = 0$.

3. Egy $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lineáris transzformációt projekciónak nevezünk, ha $\varphi^2 = \varphi$

a) Igazoljuk, hogy ha φ projekció, akkor $V = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\varphi$.

b) Mutassuk meg, hogy minden φ projekcióhoz van V-nek olyan $\mathcal{B}$ bázisa, amelyre a $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ mátrix diagonális alakú.

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés esetén van V-nek, illetve W-nek egy-egy olyan $\mathcal{B}$, illetve $\mathcal{C}$ bázisa, melyekben fölírva a $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ mátrixot, annak bal fölső sarkában egy $r \times r$-es egységmátrixot kapunk, a mátrix többi eleme pedig 0. — Mi lesz az r jelentése? (Vigyázat, itt a két tér különböző, és így a bázisok is különböz(het)nek egymástól!)

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges lineáris transzformációhoz van a térnek olyan bázisa, melyben fölírva a transzformáció mátrixát, az az alábbi két típus egyikébe tartozik:

$$\begin{pmatrix} \lambda & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \text{ vagy } \begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * \\ 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

6. Hogyan változik egy lineáris transzformáció mátrixa, ha fölcseréljük az első két bázisvektort? Hát ha az első bázisvektort kicseréljük az eredeti vektor kétszeresére?

7. Lehet-e találni olyan bázist $\mathbb{R}^2$-ben, melyben fölírva a 135°-os forgatás mátrixát, az csupa 1-esből áll?

8. Határozzuk meg az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátvektorait:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Igazak-e az alábbi következtetések?

a) λ sajátértéke A-nak $\Rightarrow$ λ^2 sajátértéke A^2-nek; b) λ sajátértéke A^2-nek $\Rightarrow$ λ sajátértéke A-nak;

c) $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek; d) $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak;

e) A nem invertálható $\Rightarrow$ A-nak van sajátvektora; f) A-nak van sajátvektora $\Rightarrow$ A nem invertálható.

10. a) Legyenek $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ sajátvektorai egy φ lineáris transzformációnak. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ pontosan akkor lesz sajátvektora φ-nek, ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ mindketten ugyanahhoz a sajátértékhez tartoznak.

b) Melyek azok a $\psi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ transzformációk, amelyeknek minden vektor sajátvektora?

11. Mik lehetnek egy projekció sajátértékei? Hát az olyan φ transzformációknak, melyeknek valamelyik hatványa 0?