Műveletek lineáris leképezésekkel. Leképezés mátrixa

1. Tegyük föl, hogy $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés, és $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek V-ben, melyekre $\varphi(\mathbf{v}_1) = \varphi(\mathbf{v}_2) = \ldots = \varphi(\mathbf{v}_k)$. Igazoljuk, hogy $\dim \operatorname{Ker} \varphi \geq k - 1$.

2. Tekintsük azt a $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, melyre:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ x - 2y + 3z - 4t \\ 2x - y + 4z - 3t \end{pmatrix}.$$

Írjuk föl a leképezés mátrixát a standard bázispárban, és adjuk meg φ magterét és képterét egy-egy bázisukkal.

3. Csoportosítsuk az alábbi $\mathbb{R}$ fölötti vektortereket úgy, hogy az izomorfak kerüljenek egy csoportba: $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}^{2\times2}$, $\mathbb{C}^{4\times1}$, $\{f \in \mathbb{C}[x] \mid \operatorname{gr} f \leq 7\}$, $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 0\right\}$.

4. Legyenek V és W tetszőleges vektorterek T fölött. Igazoljuk, hogy vagy van olyan $V_1 \leq V$ altér, amely izomorf W-vel, vagy van olyan $W_1 \leq W$ altér, amely izomorf V-vel.

5. Legyenek $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $\dim V = \dim W = 4$, $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$, $\dim \operatorname{Im} \psi = 1$. Mit mondhatunk $\dim \operatorname{Im}(\varphi + \psi)$ értékéről?

6. Igazoljuk, hogy a $\varphi : V \to W$ és $\psi : W \to U$ lineáris transzformációkra pontosan akkor igaz, hogy $\psi\varphi = 0$, ha $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \operatorname{Ker} \psi$.

7. a) Legyen V véges dimenziós tér, W pedig egy tetszőleges altere. Igazoljuk, hogy van olyan $V \to V$ lineáris leképezés, amelynek magtere W, és olyan is, amelynek a képtere W.

b) Mikor adható meg olyan $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés, melyre $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \varphi$?

8. Hány olyan $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés van $\mathbb{R}$ fölött, amelyre:

a) $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix};$

b) $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix};$

c) $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$

9. Írjuk föl a legföljebb harmadfokú $T[x]$-beli polinomok (és a 0) terén ható deriválás mátrixát valamilyen bázisban. Hogyan kapjuk meg a kétszeres deriválás mátrixát?

10. Írjuk föl a síkon az $y = x$ egyenesre való merőleges vetítés mátrixát a szokásos (standard) bázisban. Van-e olyan bázis, ahol ez a mátrix szebb?

Gyakorló feladatok a ZH témáihoz: Freud-könyv, 1.3.16, 1.4.7, 3.4.5, 4.2.2, 4.3.13, 4.5.1, 4.5.8, 5.1.1