Mátrix rangja. Lineáris leképezések, képtér, magtér

1. Számoljuk ki az alábbi mátrixok rangját:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. a) Mutassuk meg, hogy minden 1-rangú $A \in T^{n\times k}$ mátrixhoz vannak olyan $\mathbf{x} \in T^n$ és $\mathbf{y} \in T^k$ vektorok, hogy $A = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$.
b) Mutassuk meg, hogy minden $A \in T^{n\times k}$ mátrix $k \geq 2$ esetén előáll k darab 1-rangú mátrix összegeként.
c) Mutassuk meg, hogy minden r-rangú $A \in T^{n\times k}$ mátrix előáll r darab 1-rangú mátrix összegeként, de kevesebb 1-rangú összegeként már nem áll elő.

3. Hogyan változhat egy $n \times k$-as mátrix rangja, ha hozzáveszünk egy új oszlopot? Hát ha megváltoztatjuk egy elemét?

4. Tetszőleges olyan A és B mátrixokra, melyekre a műveletek értelmezhetők, bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:
a) $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$;
b) Ha A invertálható, akkor $r(AB) = r(B)$.

5*. Tegyük föl, hogy $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, és $r(A) = n - 1$, $r(B) \geq 2$. Igazoljuk, hogy $AB \neq 0$.

6. Döntsük el, lineárisak-e az alábbi leképezések, s a lineárisaknak adjuk meg a képterét és a magterét is.
a) Valós konvergens számsorozatokhoz hozzárendeljük a határértéküket.
b) $[0, 1]$-en értelmezett akárhányszor differenciálható függvényekhez hozzárendeljük a deriváltjukat.
c) $\mathbb{R}^n$ elemeihez hozzárendeljük a harmadik komponensüket.
d) $\mathbb{R}^n$ elemeihez hozzárendeljük a komponenseik átlagát.
e) Tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz rendeljük hozzá az $(x + y + 2z,\ x + z,\ 2y + 2z)$ vektort.
f) $\mathbb{C}$ nem nulla elemeihez hozzárendeljük az irányszögüket.
g) $\mathbb{C}$ elemeihez hozzárendeljük a konjugáltjukat. (Vigyázat: két különböző válasz is adható!)
h) $n \times n$-es valós mátrixokhoz hozzárendeljük a négyzetüket.
i) $n \times n$-es valós mátrixokhoz hozzárendeljük a nyomukat (azaz a főátlóbeli elemeik összegét).
j) $n \times n$-es valós mátrixokhoz hozzárendeljük a transzponáltjukat.
k) $n \times n$-es valós X mátrixokhoz hozzárendeljük az $\dfrac{X + X^T}{2}$ mátrixot.

7. Döntsük el, igazak-e az alábbi következtetések tetszőleges $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezésre.
a) $\operatorname{Ker}\varphi = V_1 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.
b) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = V_2$.
c) $\operatorname{Im}\varphi = V_2 \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.
d) $\operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = V_1$.
e) $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty$, $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = V_2$.

8. Döntsük el, igazak-e az alábbi következtetések tetszőleges $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezésre és $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_1$ vektorokra.
a) $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineárisan független $\Rightarrow \{\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_k)\}$ lineárisan független.
b) $\{\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_k)\}$ lineárisan független $\Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineárisan független.
c) $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ generátorrendszer V_1-ben $\Rightarrow \{\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_k)\}$ generátorrendszer V_2-ben.
d) $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ generátorrendszer V_1-ben $\Rightarrow \{\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_k)\}$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\varphi$-ben.
e) $\{\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_k)\}$ generátorrendszer $\operatorname{Im}\varphi$-ben $\Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ generátorrendszer V_1-ben.

9. Legyen $A \in T^{k\times n}$ tetszőleges mátrix, melynek rangja r, és tekintsük a $\varphi_A : T^n \to T^k$, $\varphi_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ lineáris leképezést, valamint az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ típusú lineáris egyenletrendszereket.
a) Hogyan jellemezhetjük $\operatorname{Ker}\varphi_A$ elemeit a fönti egyenletrendszer segítségével?
b) Hogyan jellemezhetjük $\operatorname{Im}\varphi_A$ elemeit a fönti egyenletrendszer segítségével?
c) Mi a kapcsolat az alábbi adatok között: n, k, r, kötött változók száma, szabad vátozók száma, $\dim\operatorname{Ker}\varphi_A$, és $\dim\operatorname{Im}\varphi_A$. Ennek alapján gondoljuk újra a lineáris leképezésekre vonatkozó rangtételt.

10*. Legyen $A \in T^{k\times m}$, $r(A) = r$, és legyen $\psi \in \operatorname{Hom}(T^{m\times n}, T^{k\times n})$ az a lineáris leképezés, melyre $\psi(X) = AX$ minden $X \in T^{m\times n}$ mátrixra. Hány dimenziós $\operatorname{Ker}\psi$ és $\operatorname{Im}\psi$?