Bázis, dimenzió, alterek direkt összege

1. Döntsük el, lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^n$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben:

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{1}\\\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin 1\\\sin 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e^1\\e^2\end{pmatrix}\right\}$; b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\}$; c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1^2\\2^2\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1^3\\2^3\\3^3\end{pmatrix}\right\}$.

2. Legyen $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $T=\mathbb{R}$. Döntsük el, függetlenek-e az alábbi vektorhalmazok:

a) $\{1,x,x^2,x^3\}$; b) $\{x^2,\sin x,2^x\}$; c) $\{x,\sin x,\sin^2 x\}$; d) $\{\sin^2 x,\cos^2 x,\cos 2x\}$.

3. Határozzuk meg az $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ vektor koordinátavektorát az alábbi bázisokban:

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$; b) $\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$; c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$; d) $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\right\}$.

4. Generátorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok az $U=\left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^4\mid a_1+a_2+a_3+a_4=0\right\}$ vektortérben?

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$; b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-4\end{pmatrix}\right\}$.

5. Adjuk meg az alábbi valós (azaz $\mathbb{R}$ fölötti) vektorterek dimenzióját:

a) $\left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\mid\sum_{j=1}^n a_j=0\right\}$; b) $\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\mid a_1=a_2=\ldots=a_n\}$;

c) $\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\mid\deg p\le 4,\ p(-i)=0\}$; d) $\{p(x)\in\mathbb{C}[x]\mid\deg p\le 4,\ p(-i)=0\}$.

6*. a) Legyenek $U,W\le V$ véges dimenziós alterek. Igazoljuk, hogy $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$.

b) Bizonyítsuk be, hogy egy 5 dimenziós vektortér bármely két 3 dimenziós alterének a metszete nem triviális.

7*. Legyenek $U,W\le V$. Mutassuk meg, hogy az alábbi három állítás közül bármely kettőből következik a harmadik. Ezzel a direkt összeg egy új jellemzését adjuk.

a) $U+W=V$; b) $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$; c) $\dim U+\dim W=\dim V$.

8. a) Mutassuk meg, hogy az 5. feladat a) és b) részében szereplő alterei $\mathbb{R}^n$-nek egymás direkt kiegészítői.

b) Adjuk meg az 5.c) feladatban szereplő altér egy direkt kiegészítőjét $\mathbb{R}[x]$-ben.

9*. Hány direkt kiegészítő altere van $\mathbb{Z}_2^2$ altereinek? Hát $\mathbb{Z}_2^3$ altereinek?

10. a) Mutassunk $\mathbb{R}^2$-ben végtelen sok vektort úgy, hogy ezek közül bármely kettő bázist alkosson.

b) Mutassunk $\mathbb{R}^3$-ben végtelen sok vektort úgy, hogy ezek közül bármely három bázist alkosson.

c*) Mutassunk $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok vektort úgy, hogy ezek közül bármely n darab bázist alkosson.

11*. Van 13 kavicsunk, melyek közül bármelyiket kiválasztva, a többi kavicsot két hatos csoportra oszthatjuk, hogy az egyes csoportokban levő kavicsok összsúlya egyenlő legyen. Igazoljuk, hogy minden kavics egyenlő súlyú, ha tudjuk, hogy a súlyok mérőszámai:

a) egész számok; b) racionális számok; c) valós számok.