Altér, generálás, lineáris függetlenség

1. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^n$ alábbi részhalmazai:

a) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0\}$;
b) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 = 0\}$;
c) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 = 1\}$;
d) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i\ a_i > 0\}$;
e) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 = 0 \text{ és } a_2 = 0\}$;
f) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 = 0 \text{ vagy } a_2 = 0\}$.

2. Legyenek $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ egy V vektortér tetszőleges részhalmazai. Melyek igazak az alábbi állítások közül:

a) $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \Rightarrow \langle \mathcal{H}_1 \rangle \subseteq \langle \mathcal{H}_2 \rangle$;
b) $\langle \mathcal{H}_1 \rangle \subseteq \langle \mathcal{H}_2 \rangle \Rightarrow \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$;
c) $\langle \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \rangle = \langle \mathcal{H}_1 \rangle \cup \langle \mathcal{H}_2 \rangle$.

3. Legyen V a legföljebb másodfokú valós polinomok vektortere. Döntsük el, hogy V-ben generátorrendszert alkotnak-e az alábbi halmazok:

a) $\{1 + x + x^2,\ 2 + x + x^2,\ 2 + 2x + x^2\}$; b) $\{1 + x + x^2,\ 2 + x + 2x^2,\ 2 + 3x + 2x^2\}$.

4. Legyenek a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ vektorok lineárisan függetlenek egy V vektortérben. Függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$;
b) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$;
c) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$;
d) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$;
e) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_1$.

5. Igazoljuk, hogy a háromdimenziós térnek csak az előadáson ismertetett alterei vannak (origó, origót tartalmazó egyenes, origót tartalmazó sík és az egész tér).

6. a) Melyek az egyelemű független vektrorrendszerek? (Azaz mikor lesz egy $\mathbf{v}$ vektor független?)
b) Igaz-e, hogy $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ pontosan akkor összefüggő, ha van olyan $\lambda \in T$, hogy $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{v}$

7. Legyen V valós vektortér, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ és $W \leq V$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$ akkor $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \in W$
b) Ha $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \in W$ akkor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$.
c) Ha $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $5\mathbf{u} - 8\mathbf{v}, \in W$ akkor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$.
d) Ha $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$, $4\mathbf{v} - 6\mathbf{u} \in W$ akkor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$.

8. Igazoljuk, hogy ha $\dim V$ véges, és $W \leq V$ egy V-től különböző altér, akkor $\dim W < \dim V$.

9. Legyenek W_1, $W_2 \leq V$. Igazoljuk, hogy $W_1 \cup W_2$ pontosan akkor altér, ha $W_1 \subseteq W_2$ vagy $W_2 \subseteq W_1$.

10. a) Határozzuk meg $\mathbb{Z}_2^2$ altereit.
b) Határozzuk meg $\mathbb{Z}_3^2$ altereit.
c*) Határozzuk meg $\mathbb{Z}_2^3$ altereit.
d*) Hány altere van $\mathbb{Z}_3^3$-nek?

12. Legyen V tetszőleges n dimenziós vektortér, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ részhalmazok V-ben. Döntsük el, az alábbi állítások közül melyek lesznek feltétlenül igazak.

a) Ha $\mathcal{F}$ lineárisan független is és generátorrendszer is, akkor $\mathcal{F}$ maximális független részhalmaz.
b) Ha $\mathcal{F}$ maximális lineárisan független részhalmaz, akkor generátorrendszer.
c) Ha $\mathcal{G}$ minimális generátorrendszer, akkor független.
d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
f) Ha $\mathcal{F}$ elemszáma n, és lineárisan független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
g) Ha $\mathcal{G}$ elemszáma n, és generátorrendszer, akkor lineárisan független (bázis) is.
h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.
i) Van olyan $n + 1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.

13. Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.