Determinánsok, vektorterek

1. Legyenek A, B, C olyan $n \times n$ mátrixok, melyekre $\det A = 3$, $\det B = 6$, $\det C = 4$. Mennyi lesz az $A^3B^{-1}CA^{-2}$ mátrix determinánsa?

2. Van-e olyan valós elemű A mátrix, amelyre $\det A^2 = -1$? Hát olyan $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mátrix létezik-e, melyre $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

3. a) Egy egész elemű invertálható mátrixnak a második sora csupa páros számból áll. Lehet-e a mátrix inverze is egész elemű?
b) Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy egész elemű mátrixnak az inverze is (létezzen és) egész elemű legyen.

4. Az a paraméter mely értékeire lesz invertálható az alábbi mátrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

Az invertálható esetekben határozzuk meg A^{-1} determinánsának az értékét.

5. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & ab & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & ab & a+b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1^1 & 1^2 & \dots & 1^n \\ 2^1 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 3^1 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^1 & n^2 & \dots & n^n \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n} \\ b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$.

6. Egy $n \times n$-es mátrix első sorában csupa 2-es áll, és a mátrix determinánsa 6. Mennyi lesz a mátrix összes $(n-1) \times (n-1)$-es előjelezett aldeterminánsának az összege?

7*. Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es valós mátrix invertálható, akkor egy „kicsit” megváltoztatva a mátrix elemeit a kapott új mátrix szintén invertálható lesz.

8. Mutassuk meg, hogy a sík egymástól különböző (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontjai esetén a két pontot összekötő egyenes egyenlete az ala’bbi determinánssal fejezhető ki: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$.

9. Értelmezzük a pozitív valós számok $\mathbb{R}_+$-szal jelölt halmazán az alábbi műveleteket: $a, b \in \mathbb{R}_+$ esetén legyen $a \oplus b = ab$, és tetszőleges lambda valós számra és $a \in \mathbb{R}_+$-ra legyen $\lambda \odot a = a^\lambda$. Igazoljuk, hogy a $\oplus$ művelettel mint összeadással, illetve a $\odot$ művelettel mint skalárral való szorzással $\mathbb{R}_+$ elemei vektorteret alkotnak a valós számtest fölött.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy V vektortérben $0\underline{v} = \underline{0}$ tetszőleges $\underline{v}$ vektorra. A bizonyítás minden lépését indokokljuk!

11*. Értelmezhetünk-e olyan műveleteket $\mathbb{Q}$-n, amelyekkel $\mathbb{Q}$ vektortérré válna a valós számtest fölött?

12. Keressünk a síkvektorok vektorterében (azaz $\mathbb{R}^2$-ben) olyan részhalmazokat, amelyek:
a) zártak a vektorösszeadásra, de nem zártak a skalárral való szorzásra;
b) zártak a skalárral való szorzásra, de nem zártak a vektorösszeadásra.

13. Válogassuk ki az alábbi példák közül azokat, amelyeknél a megadott részhalmaz alteret alkot a megadott vektortérben.
a) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]$;
b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{Z}\ f(x) \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{\text{valós függvények}\}$;
c) $\mathcal{P}(H') \subseteq \mathcal{P}(H)$, ahol $H' \subseteq H$ adott halmazok.