Determinánsok

1. Melyek igazak az alábbiak közül:
a) Egy racionális elemű mátrix determinánsa mindig racionális.
b) Egy irracionális elemű mátrix determinánsa mindig irracionális.
c) Egy egész elemű mátrix determinánsa mindig egész szám.
d) Egy pozitív elemű mátrix determinánsa mindig pozitív.

2. Vizsgáljuk meg, szerepelhetnek-e az alábbi mátrix determinánsában a jelzett kifejtési tagok, és amelyek igen, azoknak határozzuk meg az előjelét is!

$$\begin{vmatrix} \text{E} & \text{N} & \text{I} & \text{A} \\ \text{B} & \text{Y} & \text{G} & \text{B} \\ \text{A} & \text{É} & \text{Ú} & \text{I} \\ \text{S} & \text{L} & \text{K} & \text{R} \end{vmatrix} \qquad \text{EGÉR, BÉKA, NYÚL, LIBA}$$

3. Anélkül, hogy a determináns pontos értékét kiszámolnánk, bizonyítsuk be, hogy az alábbi „zenetörténeti” determináns értéke nem 0:

$$\begin{vmatrix} 1685 & 1732 & 1756 \\ 1770 & 1797 & 1810 \\ 1844 & 1860 & 1881 \end{vmatrix}.$$

(*Megjegyzés:* A determinánsban szereplő évszámok születési évszámokként (is) ismertek. Kik születtek az adott években?)

4. a) Mi lesz annak az $n \times n$-es mátrixnak a determinánsa, amelynek az első sora és oszlopa csupa 1-esből áll, a többi eleme viszont 0?
b) Mi lesz annak a $(2n+1) \times (2n+1)$-es mátrixnak a determinánsa, melynek minden sorában egyetlen 1-es áll, a többi 0, és az 1-esek sorra az 1., 3., 5., …, $(2n+1)$., $2n$., $(2n-2)$., …, 4., 2. helyen szerepelnek.
c) Mi lesz egy $n \times n$-es determinánsnak az értéke, ha annak bármely sorában az elemek számtani sorozatot alkotnak?
d) Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrix i-edik sorának j-edik eleme $p_i(j)$, ahol tetszőleges i-re $p_i(x)$ egy legföljebb $(n-2)$-edfokú polinom, akkor a determináns értéke 0.

5. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}.$$

6. Határozzuk meg annak a $(2n) \times (2n)$-es mátrixnak a determinánsát, amelynek a főátlójában minden elem értéke a, a mellékátlóban minden elem értéke b, és a mátrix többi eleme 0. (Keressünk legalább két különböző módszert a determináns meghatározására.)

7. Határozzuk meg annak a mátrixnak a deteminánsát, amelynek a főátlójában mindenütt 2-es áll, a 2-esek fölött és alatt mindenütt 1-es van, a többi elem pedig 0.

8. Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha a mátrixot tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90, 180, ill. 270 fokkal?

9. Bizonyítsuk be az ún. Vandermonde-determinánsra vonatkozó képletet:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (a_j - a_i).$$

10. Tegyük föl, hogy A egy $n \times n$-es mátrix, és $\det A = 3$. Számoljuk ki az alábbi $2n \times 2n$-es determinánsokat:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} A & -A \\ 0 & A \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} A & -A \\ A & A \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} A & -A \\ -A & A \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{vmatrix}.$$

11. Tegyük föl, hogy $A = (a_{ij})$ olyan $(2n+1) \times (2n+1)$-es valós elemű mátrix, melyre $a_{ij} = -a_{ji}$ teljesül minden $1 \le i, j \le 2n+1$-re. Mennyi az A mátrix determinánsa?

12. Tegyük föl, hogy $A = (a_{ij})$ olyan $n \times n$-es komplex elemű mátrix, melyre minden $1 \le i, j \le 2n+1$ esetén teljesül, hogy $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Mutassuk meg, hogy az A mátrix determinánsa valós.