Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Kilencedik alkalom (2008. április 14–18)

Összefoglaló

A hivatkozások a Kiss: *Bevezetés az algebrába* tankönyvre vonatkoznak.

- Egy g csoportelem egész kitevőjű hatványai vagy páronként különbözők, vagy periódikusan ismétlődnek. Ez azt jelenti, hogy $g, g^2, g^3, \ldots, g^d = 1$ még páronként különbözők, de már $g^{d+1} = g$, $g^{d+2} = g^2$, és ugyanígy $g^{-1} = g^{d-1}$, $g^{-2} = g^{d-2}$, és így tovább. Általában
$$g^k = g^l \iff d \mid k - l\,.$$
Az első esetben az elem *rendje* végtelen, jele $o(g) = \infty$. A második esetben g rendje d, jele $o(g) = d$. A g elem rendje tehát a különböző hatványainak a száma. A rend a legkisebb olyan pozitív egész kitevő, amire a csoportelemet emelve az 1-et (azaz a csoport egységelemét) kapjuk (4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat).
- Páratlan hosszú ciklus páros permutáció, páros hosszú ciklus páratlan permutáció (4.2.14. Tétel). Egy ciklus rendje a hossza. Ha egy permutációt diszjunkt ciklusokra bontunk, akkor rendje a ciklushosszak legkisebb közös többszöröse (4.3.12. Állítás).
- A D_n *diédercsoport* a szabályos n-szög szimmetriacsoportja. Elemei n darab forgatás és n darab tengelyes tükrözés. Ha f egy $2\pi/n$ szögű forgatás, t pedig tetszőleges szimmetriatengelyre való tükrözés, akkor D_n elemei $f, f^2, \ldots, f^n = id$ (a forgatások), és $tf, tf^2, \ldots, tf^n = t$ (a tükrözések). A számolási szabályok (4.1.23. Állítás):
$$(f^j)^n = 1, \quad (tf^j)^2 = 1, \quad f^j t = tf^{n-j}\,.$$

4.1.37. *Mikor fölcserélhető két egyenesre tükrözés a síkon?*

1. *Egy szabályos háromszöget egymás után tükrözünk a három szimmetriatengelyére. Melyik transzformáció az eredmény?*

2. *Végezzük el D_8-ban az $f^3tf^7tf^{-3}tf$ szorzást. Tükrözés vagy forgatás az eredmény?*

4.2.18. *Mutassuk meg, hogy $(123) = (231)$, sőt általában egy ciklust bármelyik eleménél kezdve ugyanazt a permutációt kapjuk.*

4.2.26. *Legyen $f = (12)(345)$. Hány különböző hatványa van ennek a permutációnak? Melyik a legkisebb hatványa, ami az egységelemet adja? Mely k és ℓ egészekre lesz $f^k = f^\ell$?*

4.2.25, 4.3.31. *Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását, előjelét, rendjét.*
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$
$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$
Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz „hátulról előre” permutációjával is.

4.2.23. *Igazoljuk, hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$.*

3. *Írjuk fel a fenti* **1.** *feladatban szereplő három tükrözést, mint a háromszög csúcsainak transzpozícióit, és végezzük el így is a szorzást.*

4.3.11. *Határozzuk meg a sík egybevágósági transzformációinak rendjét.*

4.3.29. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m^+$ és $\mathbb{Z}_m^\times$ csoportok elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7$, 8, 12.*