Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Ötödik alkalom (2008. március 10–14)

Összefoglaló

- Ha U, W alterek, akkor $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.
- A $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vektorrendszer *rangja* az általa generált altér dimenziója. Ez megegyezik mindegyik *maximális független* részrendszer elemszámával. Így a rang akkor r, ha r darab független vektort ki lehet választani $\{v_1, \ldots, v_n\}$-ből, de $r+1$-et már nem.
- Egy mátrix *oszloprangja* az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja, *sorrangja* a soraiból álló vektorrendszer rangja. Minden mátrix sorrangja és oszloprangja megegyezik. Ez a Gauss-elimináció során keletkező vezéregyesek száma. Akár sorokkal, akár oszlopokkal végzünk eliminációs lépéseket, a rang nem változik.
- Az M mátrix rangját $r(M)$ jelöli. Érvényesek az $r(M+N) \leq r(M) + r(N)$ és $r(MN) \leq r(M), r(N)$ egyenlőtlenségek (azaz szorzásnál a rang nem nőhet).
- Ha V és W **azonos test feletti** vektorterek, akkor az $A : V \to W$ leképezés *lineáris*, ha *összegtartó*, azaz $A(v+w) = A(v) + A(w)$ minden $v, w \in V$-re, és *skalárszorostartó*, azaz $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ minden $v \in V$-re és λ skalárra.
- Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A *képtere* az A értékkészlete, vagyis az $A(v)$ vektorok halmaza, ahol v befutja V-t. Jele $\mathrm{Im}(A)$.
- Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor A *magtere* azokból a V-beli vektorokból áll, amiket A a nullvektorba (azaz W nullelemébe) visz. Jele $\mathrm{Ker}(A)$.
- A *dimenziótétel:* ha $A : V \to W$ lineáris, akkor $\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = \dim(V)$.

1. *Legyen $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ fölött és U a felső háromszögmátrixok altere. Álljon S azokból a mátrixokból, melyeknek a második sora nulla, D pedig a diagonális mátrixokból. Mi lesz $U+S$, $U+D$, $S+D$? Ezek valamelyike direkt összeg-e? Adjuk meg U egy direkt kiegészítő alterét V-ben. Jó megoldás-e az alsó háromszögmátrixok halmaza?*

2. *Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.*

3. *Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott határozzuk meg a kép- és magteret, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.*

a) V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való merőleges vetítés.

b) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.

c) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.

d) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.

e) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).

f) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3$ az $\mathbb{R}$ fölött, $A(v) = Mv$, ahol M az alábbi mátrixok egyike:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a felsorolt mátrixok rangját is.

g) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, A a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).

h) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$.