Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Negyedik alkalom (2008. március 3–7)

Összefoglaló

- A $b_1, \ldots, b_n$ vektorok *bázist* alkotnak a V vektortérben, ha V minden eleme egyértelműen felírható e vektorok lineáris kombinációjaként. Ez azzal ekvivalens, hogy $b_1, \ldots, b_n$ lineárisan független (egyértelműség) és generátorrendszer V-ben (felírhatóság). Minden vektortérnek van bázisa.
- Tétel, hogy egy vektortérben minden lineárisan független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint tetszőleges generátorrendszer elemszáma.
- Így tetszőleges V vektortérben minden bázisnak ugyananyi eleme van. Ezt a számot V *dimenziójának* nevezzük, és $\dim(V)$-vel jelöljük. A dimenzió szemléletesen azt jelenti, hogy V egy elemének megadásához hány (független) skalárra van szükség.
- *Bázis = minimális generátorrendszer.* A „minimális” azt jelenti, hogy a rendszerből bárhogyan elhagyva egy vektort az már nem generátorrendszer.
- *Bázis = maximális független rendszer.* A „maximális” azt jelenti, hogy a rendszerhez bárhogyan hozzávéve egy vektort az már nem lineárisan független.
- Ha W altér a V vektortérben, akkor $\dim(W) \leq \dim(V)$, és ha W valódi altér, azaz $W \neq V$, akkor $\dim(W) < \dim(V)$. Azaz valódi altér dimenziója mindig kisebb, mint a tér dimenziója.
- Ha $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ bázis és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor
$$[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$
a v vektor *koordinátavektora* a $\mathbf{b}$ bázisban.

1. *Az alábbiak közül melyek bázisok $\mathbb{R}^2$-ben? (Helytakarékosság végett oszlopvektorok helyett sorvektorok szerepelnek.)*
  a) $(1,1)$ *és* $(2,2)$.
  b) $(0,1)$ *és* $(1,1)$.
  c) $(1,1)$ *és* $(1,-1)$.
  d) $(1,1)/\sqrt{2}$ *és* $(1,-1)/\sqrt{2}$.
Írjuk föl az $(1,2)$ koordinátáit a b)- és d)-beli bázisban is.

2. *Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.*
  a) *A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.*
  b) *A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.*
  c) *A $T^{2\times 3}$ a T test felett.*
  d) *A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?*
  e) *Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.*
  f) *Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.*
  g) *A $T^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.*

3. *Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$ esetén minden $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek végtelen sok $n-1$-dimenziós altere van.*