

Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat
Harmadik alkalom (2008. február 25–29)

Összefoglaló

- A $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ kifejezés a v_1, \dots, v_n vektorok egy *lineáris kombinációja*. Ez *triviális*, ha mindegyik λ_j együttható nulla.
 - Egy vektorrendszer *lineárisan független*, ha a vektorainak **csak** a triviális lineáris kombinációja lehet nulla, más lineáris kombinációja nem.
 - Egy v vektor *lineárisan függ* egy X vektorrendszertől, ha v felírható X elemeinek alkalmas lineáris kombinációjaként. Az összes ilyen v vektorok halmaza az X által generált $\langle X \rangle$ altér. Ez a *legsűrűbb* altér, ami X összes elemét tartalmazza, azaz minden W altérre $X \subseteq W \implies \langle X \rangle \subseteq W$.
 - Egy V vektortérben a G vektorrendszer *generátorrendszer*, ha $\langle G \rangle = V$, vagyis ha V minden eleme megkapható G elemeinek lineáris kombinációjaként.
 - Ha egy vektorrendszer lineárisan összefügg, akkor **van** olyan eleme, ami lineárisan függ a többitől (de nem feltétlenül mindegyik).
 - Ha X független, de a v vektort hozzávéve már lineárisan összefüggő rendszert kapunk, akkor v biztosan függ X -től.
1. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?*
 - a) Az \mathbb{R} feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x\}$, $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$.
 - b) Az \mathbb{R} feletti \mathbb{C} vektortérben tetszőleges három komplex szám.
 2. *Igazoljuk az alábbiakat.*
 - a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
 - b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.
 - c) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 + v_2, v_2, v_3\}$ is független.
 - d) Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.
 3. *Igaz-e \mathbb{R} felett, hogy $x \in \langle x^2 - 1, x^2 - 2, 3x + 2 \rangle$? És $\langle x, x^2 + 2, x + 2 \rangle = \langle 1, x + 1, x^2 + 1 \rangle$?*
 4. *Legyen V a sík (helyvektorai), mint \mathbb{R} feletti vektortér.*
 - a) Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?
 - b) Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.
 5. *Legyen V vektortér a T test felett.*
 - a) Mi az üres halmaz által generált altér?
 - b) Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.
 - c) Mikor lesz két altér uniója is altér?