

## Bsc algebra2 alapszintű gyakorlat

Második alkalom (2007. február 18–22)

1. Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Altér-e a  $W$  halmaz a  $V$  vektortérben az alábbi esetekben?

- $V = T[x]$  a  $T$  test felett,  $W$  a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.
- $V = T[x]$  a  $T$  test felett,  $W$  a legfeljebb tizedfokú polinomok, és a zéruspolinom.
- $V$  a komplex számok vektortere  $\mathbb{R}$  illetve  $\mathbb{C}$  felett, és  $W = \{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ .
- $V$  a sík  $\mathbb{R}$  felett,  $W$  pedig az első és harmadik síknegyed uniója.

IHF. Ágoston István túloldali, 9. feladata.

### Gyakorló feladatok mátrixok szorzására

3. Számítsuk ki az  $5 \times 5$ -ös  $N = ((n_{ij}))$  mátrix első öt hatványát, ahol  $n_{ij} = 1$ , ha  $i - j = 1$ , és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy  $n \times n$ -es  $M = ((m_{ij}))$  mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz  $m_{ij} = 0$  ha  $i \geq j$ ). Bizonyítsuk be, hogy  $M^n = 0$ .

4. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?

5. Jelölje  $E^{(ij)}$  azt a mátrixot, amelynek  $i$ -edik sorában a  $j$ -edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorozunk  $E^{(ij)}$ -vel? Van-e olyan  $3 \times 3$ -as  $A$  mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges  $3 \times 3$ -as  $X$  mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az  $X$  többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen  $A$  akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?

6. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

7. Legyenek  $A$  és  $B$   $n \times n$ -es mátrixok, számítsuk ki  $\operatorname{tr}(AB - BA)$  értékét. Itt  $\operatorname{tr}(M)$  az  $M$  négyzetes mátrix **nyomát**, azaz a főátlóban álló elemek összegét jelöli.

8. Az  $M$  és  $N$  mátrixok **felcserélhetőek**, ha  $MN = NM$ . Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az  $E^{(23)}$ -mal felcserélhető (lásd 5. feladat), és azokat is, amelyek **minden** háromszor hármas mátrixszal felcserélhetőek.