BSc algebra1 alapszintű gyakorlat

Második zárthelyi (2008. dec. 10.) — eredmények

1. a) Mivel a szám hossza 1, szöge pedig 360°-nak $117/360 = 13/40$-szerese, és $(13, 40) = 1$, ezért a keresett rend 40 (3 pont).
b) Ha például $b = -6$, akkor a polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, mert a Schönemann–Eisenstein-kritérium $p = 3$-ra alkalmazható (1 pont, vigyázat, $p = 2$ nem jó). Azt, hogy ne legyen irreducibilis, úgy érhetjük el, hogy legyen racionális gyöke. Például az 1 akkor lesz gyöke, ha $b = -13$ (2 pont).

2. a) A gyökök és együtthatók összefüggése szerint a gyökök összege $\sigma_1 = (-1) \cdot (-1)/2 = 1/2$, a kétszeres szorzatok összege $\sigma_2 = 3/2$, a háromszoros szorzatok összege $\sigma_3 = (-1)^3(-2)/2 = 1$, végül a gyökök szorzata $\sigma_4 = (-1)^4 4/2 = 2$ (1 pont). Ezért a négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -11/4$ (1 pont), a reciprokösszeg pedig $\sigma_3/\sigma_4 = 1/2$ (1 pont).
b) A maradékos osztást elvégezve hányadosnak $(x^2 - x)/2$, maradéknak $2x + 1$ adódik, ezért nem osztható (3 pont). *Második megoldás:* Legyen $\varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$ harmadik primitív egységgyök, ez gyöke az osztónak, azaz $2(x^2 + x + 1)$-nek (1 pont). Ha nem lenne maradék, akkor ez gyöke lenne az osztandónak is (1 pont). Ez azonban nem igaz, mert $\varepsilon^4 = \varepsilon$ miatt behelyettesítve a nem nulla $2\varepsilon + 1$ számot kapjuk (1 pont).

3. Az első három oszlop által megadott homogén lineáris egyenletrendszert felírva, majd az eliminációt elvégezve látjuk, hogy van szabad változó, és így az első három oszlopvektor nem független. Ez közvetlenül is világos, mert az első oszlop a második és a harmadik oszlop összege (3 pont). A teljes mátrixra a Gauss-eliminációt elvégezve három vezéregyes adódik, ezért a rang három (3 pont). *Megjegyzés:* A két eliminációt lehet egyszerre is csinálni, csak arra kell ügyelni, hogy az első három oszlopban próbáljunk karikázni, amíg lehetséges. Az első három oszlop összefüggősége abból fog látszani, hogy a harmadik karikát már nem tudjuk ezekben elhelyezni (csak a negyedikben).

4. A racionális gyökteszt alapján a lehetséges gyökök ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$ (2 pont). Ezeket Hornerrel kipróbálva, és a megfelelő gyöktényezőt mindig kiemelve azt kapjuk, hogy a polinom $(2x-1)^2(x+1)^3$ (3 pont). Ezért a -1 háromszoros, az $1/2$ pedig kétszeres gyök (1 pont).

5. Tanultuk, hogy $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$. Az x helyére x^{502}-t írva azt kapjuk, hogy $x^{2008} + 4 = (x^{1004} - 2x^{502} + 2)(x^{1004} + 2x^{502} + 2)$ (4 pont). E két tényező a $p = 2$-re alkalmazott Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (2 pont). *Második megoldásként* használhatjuk az $x^{2008} + 4 = (x^{1004} + 2)^2 - (2x^{502})^2$ ötletet is.

6. Az $x^6 + 1$ gyökei a -1 hatodik gyökei. Trigonometrikus alakban számolva a kapott számok hossza 1, szögei pedig rendre 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330° (2 pont). Mindegyiket a konjugáltjával párba állítva, és a megfelelő gyöktényezőket összeszorozva a következőket kapjuk:

$$(x - i)(x + i) = x^2 + 1\,,$$
$$(x - \sqrt{3}/2 - i/2)(x - \sqrt{3}/2 + i/2) = x^2 - \sqrt{3}x + 1\,,$$
$$(x + \sqrt{3}/2 - i/2)(x + \sqrt{3}/2 + i/2) = x^2 + \sqrt{3}x + 1$$

(mindegyik 1 pont). A kapott tényezők már irreducibilisek $\mathbb{R}$ fölött, mert nincs valós gyökük (1 pont). Ennek alapján a polinom felbontása $x^6+1 = (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$. *Második megoldás:* $x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$ (2 pont). Itt $x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}x)^2$, ami a fenti utolsó két tényező szorzata (3 pont). A kapott másodfokú tényezők irreducibilisek, mert nincs valós gyökük (1 pont). *Harmadik megoldás:*

$$x^6 + 1 = \frac{x^{12} - 1}{x^6 - 1} = \frac{\Phi_{12}(x)\Phi_6(x)\Phi_4(x)\Phi_3(x)\Phi_2(x)\Phi_1(x)}{\Phi_6(x)\Phi_3(x)\Phi_2(x)\Phi_1(x)} = \Phi_{12}(x)\Phi_4(x) \qquad \text{(2 pont).}$$

Innen tovább ugyanúgy, mint a második megoldásban.