BSc algebra1 alapszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2008. nov. 5.) — eredmények

1. a) $z = 6\sqrt{3}(\cos 120° + i \sin 120°)$ (1 pont). A negyedik gyökök abszolút értéke $\sqrt[8]{108}$, szöge 30°, 120°, 210°, 300°, algebrai alakjuk $\pm(\sqrt[8]{108}\sqrt{3}/2 + i\sqrt[8]{108}/2)$ és $\pm(\sqrt[8]{108}/2 - i\sqrt[8]{108}\sqrt{3}/2)$ (2 pont).
b) Ha $z = x + iy$, akkor az egyenlet $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = -y$ (1 pont), ahonnan $y \leq 0$ (1 pont). Négyzetre emelve $x - 2 = 0$ adódik, tehát a keresett alakzat a 2 pontból függőlegesen lefelé induló zárt félegyenes (1 pont). (Ha valaki az egyenes másik felét is beveszi, azért 1 pont a levonás.)

2. a) A determináns értéke $76 - 7c$, ezért $c = 9$ (1 pont). Az első sor második eleméhez tartozó előjeles aldetermináns $-(4c - 42) = 6$ (1 pont), ezért a keresett elem $6/13$ (1 pont). (Ha valaki elfelejt transzponálni, vagy $\det(N)$-nel osztani, azért $1 - 1$ pont levonás jár.)
b) Az i és j értéke csak 3 és 4 lehet valamelyik sorrendben, mert a második indexek is az $\{1,2,3,4,5\}$ egy permutációját alkotják (1 pont). Az első indexek szerint rendezve $a_{1i}a_{21}a_{35}a_{4j}a_{52}$ adódik. Ha $i = 3$ és $j = 4$, akkor az inverziók száma 5, ez nem megoldás. Ha $i = 4$ és $j = 3$, akkor az inverziók száma 6, ez megoldás (2 pont).

3. Az eliminációt végrehajtva az általános megoldás (x, y, z)-re $(11z - 11, 8 - 8z, z)$ (3 pont). Tehát $22 = xz = (11z - 11)z$, ami z-re másodfokú egyenlet. A megoldóképletből két (x, y, z) érték adódik: $(11, -8, 2)$ és $(-22, 16, -1)$ (3 pont).

4. Például $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Második megoldás:* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $|z - w|^2 = (z - w)\overline{(z - w)} = z\overline{z} + w\overline{w} - z\overline{w} - w\overline{z}$ (2 pont). Mivel $z\overline{z} = |z|^2$ és $w\overline{w} = |w|^2$, a feladat feltétele akkor és csak akkor teljesül, ha $z\overline{w} + w\overline{z} = 0$ (2 pont), átalakítva $z/w = -\overline{z/w}$. De egy szám valós része pontosan akkor nulla (vagyis a szám pontosan akkor tisztán képzetes), ha a konjugáltja megegyezik az ellentettjével (2 pont). *Második megoldás:* A 0, z, w számok alkotta háromszögben az oldalak hossza $|z|$, $|w|$ és $|z - w|$. Tehát Pitagorász tétele (és annak megfordítása) alapján a feladat feltétele akkor és csak akkor teljesül, ha ebben a háromszögben 0-nál derékszög van (3 pont), azaz ha z/w szöge, ami z és w szögeinek különbsége, $\pm 90°$. Ez pedig azt jelenti, hogy z/w valós része nulla (3 pont). *Harmadik megoldás:* Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$, ahol a, b, c, d valós. Ekkor $|z|^2 + |w|^2 - |z - w|^2 = 2(ac + bd)$ (3 pont) és z/w valós része $(ac + bd)/(c^2 + d^2)$ (2 pont). Ez a két mennyiség ugyanakkor lesz nulla, mert $w \neq 0$ miatt $c^2 + d^2 \neq 0$ (1 pont).

6. Tíz páratlan szám biztosan elég, mert az egységmátrix megfelel a feltételeknek (2 pont). Kevesebb páratlan szám nem elég, mert ha csak legfeljebb 9 páratlan szám van a mátrixban, akkor valamelyik sorba nem jut. Ebből a sorból kiemelhetünk 2-t. A megmaradó determináns csupa egész számból áll, így értéke egész szám, és ezért az eredeti mátrix determinánsa páros lesz (4 pont).