Mat. BSC: Algebra 1 1. ZH 2008. november 5.

NÉV: ______________________________ ELTE azon.: ____________

Gyakorlat: ÁI(K8) FR(SZ8) KE(K8) KE(P8)

A feladatokra adható maximális pontszám **6 pont**. Minden megoldásnál kellő részletességű **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Használni csak egy lapnyi **kézzel írott** puskát lehet, kalkulátort és mobiltelefont viszont nem. A megoldáshoz **90 perc** áll rendelkezésre.

1. a) (*3 pont*) Adjuk meg a $z = -3\sqrt{3}+9i$ komplex szám trigonometrikus alakját, majd z mindegyik negyedik gyökét algebrai alakba visszaszámítva.

b) (*3 pont*) Rajzoljuk le a síkon a $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = \mathrm{Im}(\overline{z})\}$ halmazt. Milyen alakzat ez?

2. a) (*3 pont*) Legyen $N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & c \end{bmatrix}$, ahol $\det(N) = 13$. Keressük meg c értékét, és adjuk meg N inverzében a második sor első elemét.

b) (*3 pont*) Az 5×5-ös $((a_{ij}))$ mátrix determinánsában az $a_{1i}a_{35}a_{52}a_{4j}a_{21}$ taghoz tartozó permutáció előjele $+$. Mennyi i és j?

3. Legyen $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. Adjuk meg az $M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ lineáris egyenletrendszer általános megoldását. Soroljuk fel az összes olyan megoldást, melyre $xz = 22$ is teljesül.

4. Adjunk meg olyan 2×2-es A és B mátrixokat, amelyekre AB nulla, de BA nem nulla.

5. Tegyük föl, hogy z és w nem nulla komplex számok. Bizonyítsuk be, hogy $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2$ akkor és csak akkor teljesül, ha z/w valós része nulla.

6. Egy 10×10-es mátrix csupa egész számból áll. Minimálisan hány páratlan számnak kell lennie a mátrixban ahhoz, hogy a mátrix determinánsának értéke páratlan szám legyen?