Bsc Algebra1

Alap- és középszintű vizsgatematika (2008 ősz)

A vizsga irásbeli, az időpontok az ETR-ben olvashatók. Aki valamilyen okból mégsem tud jönni vizsgázni egy napon, az **minél hamarabb jelentkezzen le az ETR-ben** (ezzel a többi vizsgázónak segít, mert a halasztások miatt nem lesz új vizsganap). A **konzultációk** mindig a vizsga előtti napon vannak. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható (kalkulátor sem). A vizsga anyaga a

Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös kiadó, 2006, illetve a
Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*, TypoTEX, 2007

tankönyvek első három-három fejezetének az alábbi tematikában kijelölt részei. Az F betű a Freud-könyvre, a K a Kiss-jegyzetre utal. A tanuláshoz hasznosak a gyakorlatokon szerepelt feladatsorok is!

A vizsga első részében egy óra alatt 30 könnyű kérdésre kell válaszolni, ezek a fogalmak, tételek megértését vizsgálják konkrét példák, ellenpéldák segítségével. A nehezebb bizonyításokat ehhez a részhez nem feltétlenül szükséges megtanulni. Aki nem ér el legalább 50%-ot, annak a vizsgája sajnos elégtelen, aki viszont igen, és *alapszinten* vizsgázik, annak a vizsgája már sikeres. Mintaként a tavalyi és tavalyelőtti vizsgadolgozatok szolgálnak, ezek letölthetők a `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/` címről.

A vizsga második részében harminc perc alatt egy bizonyítást kell leírni, a megfelelő tételek listája a tematika végén található. Aki *középszinten* vizsgázik, annak ebből a részből is legalább 50%-ot el kell érnie ahhoz, hogy vizsgája sikeres legyen. Ebben az esetben az érdemjegyet a két rész összpontszáma határozza meg.

Absztrakt algebrai alapfogalmak. (Lásd K2.2. Szakasz.) Asszociativitás, kommutativitás, egységelem, inverz. Egész kitevőjű hatványok és tulajdonságaik, egész többszörös. Gyűrű; kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű; test. Invertálható elem egységelemes gyűrűben. Nullosztómentes gyűrűben szabad egyszerűsíteni. Minden test nullosztómentes.

Összeadás és szorzás mod m (K1.1. szakasz). A $\mathbb{Z}_m$ invertálható elemei pontosan az m-hez relatív prím elemek. A $\mathbb{Z}_m$ gyűrű akkor és csak akkor nullosztómentes ha test, akkor és csak akkor, ha m prím. Ha minden elem p-szerese nulla egy gyűrűben (p prím), akkor itt tagonként lehet p-edik hatványra emelni (K3.3.22. Feladat).

A permutáció mint bijektív leképezés. Permutációk kompozíciója, inverze. Transzpozíció, minden permutáció cserék szorzata. Az inverzió fogalma, permutáció paritása (előjele). Szorzat előjele az előjelek szorzata. Következmények: inverz előjele, minden transzpozíció páratlan permutáció, a páros permutációk száma (L1.1, K4.2. szakasz).

Komplex számok. (Lásd K1. Fejezet.) A komplex számok (mint $a+bi$ alakú formális kifejezések, ahol $i^2 = -1$). Az $a+bi$ előállítás egyértelmű, valós és képzetes rész. Összeadás, kivonás, szorzás, konjugált, abszolút érték, tulajdonságaik, kapcsolatuk. Minden nem nulla komplex számmal lehet osztani, a komplex számok testet alkotnak. Nullosztómentesség. A komplex számsík, komplex szám argumentuma (szöge) és trigonometrikus alakja. Összeadás, mint vektorösszeadás. Szorzás és osztás trigonometrikus alakban. Egyes geometriai transzformációk kifejezése komplex számokkal. A háromszög-egyenlőtlenség.

Komplex szám rendje: a különböző hatványainak a száma (K1.5. szakasz). Ha nem minden hatvány különböző, akkor a rend véges, és a hatványok periodikusan ismétlődnek. A rend a legkisebb pozitív egész, melyre a számot emelve 1-et kapunk. Egy szám két hatványa akkor és csak akkor egyenlő, ha a kitevők különbsége a rendnek többese. Végtelen rendű szám hatványai páronként különbözők. Képlet a hatvány rendjére.

A komplex egységgyökök, mint $\mathbb{C}$ véges rendű elemei. Trigonometrikus alakjuk, számuk. Az n-ed rendű elemek neve: primitív n-edik egységgyök. Ezek éppen azok a számok, melyek hatványai pontosan az összes n-edik egységgyököket adják. Jellemzésük a trigonometrikus alak segítségével, számuk. Gyökvonás komplex számból, az n-edik gyökök meghatározása és geometriai elhelyezkedése.

Polinomok. (Lásd K2. és K3. Fejezet.) Kommutatív, egységelemes gyűrű fölötti polinom, mint formális kifejezés. Polinomok egyenlősége, együtthatói, konstans tagja, főtagja, főegyütthatója, normált polinom. Összeadás, nullapolinom, kivonás, szorzás. Polinomgyűrű, ez is kommutatív, egységelemes gyűrű. Nem nulla polinom foka, a fokszám változása a műveleteknél. Ha R nullosztómentes, kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor $R[x]$ is az (K2.1 és K2.3. szakasz).

A polinomfüggvény fogalma. Polinom gyöke, a Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége. Nullosztómentes gyűrű fölött a különböző gyökökhöz tartozó gyöktényezők egyszerre is kiemelhetők, a gyöktényezős alak egyértelműsége, a gyökök maximális száma, a polinomok azonossági tétele. Végtelen gyűrű fölött a polinomfüggvények és a polinomok kapcsolata kölcsönösen egyértelmű, de véges gyűrű fölött nem. Példa kommutatív, nem nullosztómentes gyűrű fölötti polinomra, melynek több gyöke van, mint a foka. Az algebra alaptétele: $\mathbb{C}$ fölött minden nem konstans polinomnak van gyöke. Gyök multiplicitása. Egy n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva pontosan n komplex gyöke van (K2.4. és K2.5. szakasz). A racionális gyökteszt (K3.3.10. Tétel). A harmadfokú egyenlet, Cardano képlete (a képletet nem kell megjegyezni), a köbgyökvonás helyes elvégzése, Casus Irreducibilis (K3.7. és K3.8. szakasz).

Az egységelemes, kommutatív gyűrű fölötti többhatározatlanú polinom fogalma, nullosztómentesség (K2.6. szakasz). A gyökök és együtthatók összefüggése, az elemi szimmetrikus polinomok. A szimmetrikus polinomok alaptétele (K2.7. szakasz).

A számelmélet alaptétele. (Lásd K3. Fejezet.) Számelméleti fogalmak egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrűben: oszthatóság, egység, felbonthatatlan, prímelem, kitüntetett közös osztó, ennek egyértelműsége (K3.1. szakasz).

A polinomgyűrű egységei (K3.1.11. Gyakorlat). Egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrű fölött minden olyan polinommal lehet maradékosan osztani, amelynek a főegyütthatója invertálható. A maradékos osztás egyértelmű. Test fölötti polinomgyűrűben a $\mathbb{Z}$ mintájára belátható a számelmélet alaptétele: euklideszi algoritmus, a kitüntetett közös osztó, a felbonthatatlan (irreducibilis) és a prímtulajdonságú elemek viszonya (K3.2. szakasz).

Test fölött az irreducibilis polinomok azok a nem konstans polinomok, melyek nem bonthatók alacsonyabb fokúak szorzatára. Minden elsőfokú polinom irreducibilis; a másod- és harmadfokúak pontosan akkor irreducibilisek, ha nincs az alaptestben gyökük. Ha egy legalább másodfokú polinomnak van az alaptestben gyöke, akkor nem irreducibilis (de ha nincs gyöke, lehet reducibilis). Az irreducibilis polinomok $\mathbb{C}$ fölött az elsőfokúak. Egy $\mathbb{R}$ fölötti polinomnak minden komplex szám ugyanannyiszoros gyöke, mint a konjugáltja. Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke. Az $\mathbb{R}$ fölötti irreducibilis polinomok az elsőfokúak, és azok a másodfokúak, melyeknek diszkriminánsa negatív (K3.3. szakasz).

$\mathbb{Z}[x]$ számelmélete. A primitív polinom fogalma. $\mathbb{Z}[x]$-ben az irreducibilis polinomok a $\mathbb{Z}$-ben felbonthatatlan konstansok, valamint a $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis primitív polinomok. $\mathbb{Z}[x]$ alaptételes. Általánosítás: ha R alaptételes, akkor $R[x]$ is az. Következmény: $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ és $T[x_1, \ldots, x_n]$ alaptételes, ahol T test (K3.4. szakasz). A Schönemann-Eisenstein kritérium $\mathbb{Q}$ fölötti irreducibilitásra. Következmény: $\mathbb{Q}$ fölött akárhányad fokú irreducibilis polinom létezik. Módszerek az irreducibilitás eldöntésére (K3.5. szakasz).

A körosztási polinom definíciója, rekurzív képlete, ez egész együtthatós. A körosztási polinom irreducibilitása $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ fölött (K3.9. szakasz, és az ezt követő feladatok).

A determináns. (Lásd F1.2–1.5). A determináns alaptulajdonságai: minden oszlopában lineáris, ha két oszlop egyenlő, a determináns értéke nulla (F9.8 is). Következmény: a determináns oszlopcserénél előjelet vált, egy oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adva a determináns értéke nem változik. A transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával, így az oszlopokra bizonyított tulajdonságok sorokra is érvényesek. Felső háromszögmátrix determinánsa, a determináns kiszámítása Gauss-eliminációval. A determináns definíciója. Az előjeles aldetermináns fogalma, a kifejtési tétel. A Vandermonde-determináns. A determinánsok szorzástétele (LF9.8.4).

Lineáris algebra. A lineáris egyenletrendszer fogalma és megoldása Gauss-eliminációval. Vezéregyesek, tilos sorok, szabad és kötött változók, a megoldások általános képlete és száma. Az egyetlen összefüggés az ismeretlenek száma, az egyenletek száma, és a megoldások száma között: ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás. Homogén lineáris egyenletrendszer, triviális megoldás, ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor van nemtriviális megoldás. A Cramer-szabály. (L3.1.)

A sík vektorai, helyvektorok, összeadás és skalárral szorzás. Egy T test fölötti oszlopvektorok, összeadás, skalárral szorzás. Mátrix és vektor szorzata, mátrixok szorzása. Az egységmátrix és az inverz mátrix fogalma. Mátrixok összeadása, és skalárral szorzása. A mátrix-műveletek tulajdonságai, az $n \times n$-es mátrixok egységelemes gyűrűt alkotnak. A ferde kifejtési tétel, az inverz mátrix képlete. Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Következmény: $MN = I$ akkor és csak akkor, ha $NM = I$. Invertálás Gauss-eliminációval (L2.1, 2.2. 3.5).

Vektorrendszer lineáris függetlensége. A determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopvektorai lineárisan összefüggőek. Vektorrendszer rangja. Mátrix sor- és oszloprangja, ezek megegyeznek. Szorzatmátrix rangja legfeljebb annyi, mint bármelyik tényező rangja. A rang kiszámítása Gauss-eliminációval. (L3.3, 3.4).

Bizonyítások a vizsga második felében

1. Hatvány rendje, a primitív n-edik egységgyökök száma (K1.5.9, K1.5.10, 1.5.13).
2. Mátrix sor- és oszloprangja egyenlő (F3.4.2).
3. Ha két sor egyenlő, akkor a determináns nulla (F1.3.3).
4. Transzponált determinánsa (F1.3.6).
5. A determinánsok kifejtési tétele (F1.4.2).
6. A polinomok gyökeinek száma, azonossági tétel (K2.4.7, K2.4.10).
7. Lagrange-interpoláció (K2.4.12).
8. A szimmetrikus polinomok alaptétele: létezés (K2.7.3, K2.6.6).
9. A szimmetrikus polinomok alaptétele: egyértelműség (K2.7.3, K2.7.7).
10. A második Newton–Girard-formula (K2.7.8, K2.7.10).
11. A maradékos osztás tétele: létezés és egyértelműség (K3.2.1).
12. Valós együtthatós polinomok komplex gyökei, irreducibilitás (K3.3.6, K3.3.8).
13. Első Gauss-lemma (K3.4.3).
14. Második Gauss-lemma (K3.4.7, K3.4.5).
15. $\mathbb{Z}[x]$ irreducibiliseinek jellemzése (K3.4.8).
16. $\mathbb{Z}[x]$ alaptételes (K3.4.10, K3.4.9).
17. A Schönemann–Eisenstein-kritérium (K3.5.2).
18. A körosztási polinom egész együtthatós (K3.9.5, K3.9.7).