NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. (BSc.) **Algebra1 alap- és középszint: 4. vizsga/1** *2009. január 28.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 15 *pontot, annak a vizsgája sajnos elégtelen (ekkor a második részt ki sem javítjuk.) Aki középszinten vizsgázik, annak a dolgozat második részéből is legalább 50%-ot kell szereznie ahhoz, hogy a vizsgája sikeres legyen.*

1. Mennyi $(1-i)^2$ konjugáltjának képzetes része?

2

2. Mennyi $71i\big(\cos(-71°) - i\sin(-71°)\big)$ szöge?

$161°$

3. Mely nem nulla z komplex számokra lesz z és $1/z$ szöge egyenlő?

A (nem nulla) valósakra.

4. Mennyi az $1+i$ és $-2-3i$ pontok távolsága a komplex számsíkon?

$|(1+i)-(-2-3i)| = 5$

5. Adjunk példát olyan komplex számra, amelynek hossza 1, de amely nem egységgyök.

$\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$

6. A jobb oldali egyenletrendszerben karikázzuk be a lehető legtöbb egyenletet úgy, hogy ezek az x, y, z ismeretlenekre **lineáris** egyenletrendszert alkossanak.

$x+z=2$	karikázandó
$x+z=0$	karikázandó
$x-y=3i$	karikázandó
$x^2=-2$	nem lineáris
$x+yz=2$	nem lineáris

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Hányszor hányas C mátrixokra értelmes az $A+CB$ kifejezés?

6×2

8. Ha $N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$, akkor mi az N elemeinek a szorzata?

3

9. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 2a & a \\ -a & a \end{pmatrix}$ inverzét, ha $a \neq 0$.

$\begin{pmatrix} 1/3a & -1/3a \\ 1/3a & 2/3a \end{pmatrix}$

10. Adjunk példát két 2×2-es, valós, 2 rangú mátrixra, melyek összegének rangja 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Ha az $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix determinánsa n, akkor mennyi lesz $\det(nM)$?

n^{n+1}

12. A négyszer négyes N mátrixnak pontosan egy eleme egyenlő nullával. A $\det(N)$-et definiáló $4!$ tagú összegnek hány darab nem nulla tagja van?

$24 - 3! = 18$

13. Mennyi az $\begin{pmatrix} x\,v\,y\,u \\ u\,x\,y\,v \end{pmatrix}$ permutációban az inverziók száma?

4 (ezek ux, uv, yv, uy).

14. Írjuk fel az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ determináns i-edik sor szerinti kifejtését, ahol az a_{ij} elemhez tartozó előjel **nélküli** aldetermináns X_{ij}.

$$(-1)^{i+1}a_{i1}X_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}X_{in} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}X_{ij}$$

15. Egy háromszor hármas mátrix minden előjeles aldeterminánsa 1. Mennyi a determinánsa?

0 (ferde kifejtési tétel)

16. Egy 4×2-es mátrixnak van három lineárisan összefüggő sora. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

0, 1 és 2.

17. Adjunk példát két olyan nulladfokú polinomra, melyek összegének nincs foka.

Például 1 és -1 (mert az összeg a nullapolinom).

18. Adjunk példát olyan harmadfokú, komplex együtthatós polinomra, amelynek nincs valós gyöke, de minden gyökére igaz, hogy annak konjugáltja is gyöke a polinomnak.

Például $(x-i)^2(x+i)$.

19. Melyik az a másodfokú, valós együtthatós polinom, amelynek $2+i$ gyöke, és konstans tagja 25?

$5(x-2-i)(x-2+i) = 5(x^2-4x+5)$

20. A $3x^3 + ax^2 + bx + 5$ (komplex együtthatós) polinomnak kétszeres gyöke az $1/2$. Mi a harmadik gyöke?

$-20/3$

21. Mi a maradék, ha az x^{2009} polinomot maradékosan elosztjuk $x^{2008} - 2008$-cal?

$2008x$

22. Mely $n > 1$ egészekre van az $x^n + 2x + 1$ polinomnak racionális gyöke?

n páros

23. Hány **valós** fölött irreducibilis polinom szorzatára bomlik $x^5 - 1$?

3

24. Írjuk föl a $\Phi_4(x)$ körosztási polinomot.

$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

25. Adjunk meg egy olyan $p \in \mathbb{Z}$ **prím**számot, amelyre a $2x^6 + 90x^3 + 2p^2x^2 + 150$ polinom teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

3

26. Adjunk meg egy olyan harmadfokú, egész együtthatós polinomot, amely $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

$3(x^3 + 2)$

27. Számítsuk ki $1/(5 + 4)$ értékét a $\mathbb{Z}_7$ testben.

4

28. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_{30}$ gyűrű egy olyan nem nulla b elemét, amelyet ebben a gyűrűben 24-gyel megszorozva nullát kapunk.

5

29. Bontsuk az $x^3 + 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára a $\mathbb{Z}_3$ test fölött.

$(x + 2)^3$ (tagonként lehet köbre emelni).

30. Hány **különböző** valós gyöke van az $x^3 - 3x + 2$ polinomnak?

2, mert ez $(x - 1)^2(x + 2)$.

Emlékeztetőül Cardano képlete az $x^3 + px + q$ polinomra:

$$\sqrt[3]{(-q/2) + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt[3]{(-q/2) - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}\,.$$

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (30 perc). *A tétel teljesen precíz kimondása* 3 *pontot, az egész feladat* 10 *pontot ér. Középszinten a legalább elégséges osztályzathoz ebből a részből legalább* 5 *pontot kell szerezni.*

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, középszintűeknél pedig a második részben is legalább* 5 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első és a második részre kapott összpontszám S, akkor:*

	Osztályzat
$S \leq 19$	2
$20 \leq S \leq 25$	3
$26 \leq S \leq 31$	4
$32 \leq S \leq 40$	5

---

31. A (polinomokra vonatkozó) maradékos osztás tétele: létezés és egyértelműség.