NÉV: ________________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. (BSc.) **Algebra1 alap- és középszint: 4. vizsga/1** *2009. január 28.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 15 *pontot, annak a vizsgája sajnos elégtelen (ekkor a második részt ki sem javítjuk.) Aki középszinten vizsgázik, annak a dolgozat második részéből is legalább 50%-ot kell szereznie ahhoz, hogy a vizsgája sikeres legyen.*

1. Mennyi $(1-i)^2$ konjugáltjának képzetes része?

2. Mennyi $71i\big(\cos(-71°) - i\sin(-71°)\big)$ szöge?

3. Mely nem nulla z komplex számokra lesz z és $1/z$ szöge egyenlő?

4. Mennyi az $1+i$ és $-2-3i$ pontok távolsága a komplex számsíkon?

5. Adjunk példát olyan komplex számra, amelynek hossza 1, de amely nem egységgyök.

6. A jobb oldali egyenletrendszerben karikázzuk be a lehető legtöbb egyenletet úgy, hogy ezek az x, y, z ismeretlenekre **lineáris** egyenletrendszert alkossanak.

$$x+z=2$$
$$x+z=0$$
$$x-y=3i$$
$$x^2=-2$$
$$x+yz=2$$

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Hányszor hányas C mátrixokra értelmes az $A + CB$ kifejezés?

8. Ha $N \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$, akkor mi az N elemeinek a szorzata?

9. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 2a & a \\ -a & a \end{pmatrix}$ inverzét, ha $a \neq 0$.

10. Adjunk példát két 2×2-es, valós, 2 rangú mátrixra, melyek összegének rangja 1.

11. Ha az $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix determinánsa n, akkor mennyi lesz $\det(nM)$?

12. A négyszer négyes N mátrixnak pontosan egy eleme egyenlő nullával. A $\det(N)$-et definiáló $4!$ tagú összegnek hány darab nem nulla tagja van?

13. Mennyi az $\begin{pmatrix} x\,v\,y\,u \\ u\,x\,y\,v \end{pmatrix}$ permutációban az inverziók száma?

14. Írjuk fel az $n \times n$-es $((a_{ij}))$ determináns i-edik sor szerinti kifejtését, ahol az a_{ij} elemhez tartozó előjel **nélküli** aldetermináns X_{ij}.

15. Egy háromszor hármas mátrix minden előjeles aldeterminánsa 1. Mennyi a determinánsa?

16. Egy 4×2-es mátrixnak van három lineárisan összefüggő sora. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

17. Adjunk példát két olyan nulladfokú polinomra, melyek összegének nincs foka.

18. Adjunk példát olyan harmadfokú, komplex együtthatós polinomra, amelynek nincs valós gyöke, de minden gyökére igaz, hogy annak konjugáltja is gyöke a polinomnak.

19. Melyik az a másodfokú, valós együtthatós polinom, amelynek $2+i$ gyöke, és konstans tagja 25?

20. A $3x^3 + ax^2 + bx + 5$ (komplex együtthatós) polinomnak kétszeres gyöke az $1/2$. Mi a harmadik gyöke?

21. Mi a maradék, ha az x^{2009} polinomot maradékosan elosztjuk $x^{2008} - 2008$-cal?

22. Mely $n > 1$ egészekre van az $x^n + 2x + 1$ polinomnak racionális gyöke?

23. Hány **valós** fölött irreducibilis polinom szorzatára bomlik $x^5 - 1$?

24. Írjuk föl a $\Phi_4(x)$ körosztási polinomot.

25. Adjunk meg egy olyan $p \in \mathbb{Z}$ **prím**számot, amelyre a $2x^6 + 90x^3 + 2p^2x^2 + 150$ polinom teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

26. Adjunk meg egy olyan harmadfokú, egész együtthatós polinomot, amely $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis, de $\mathbb{Z}$ fölött nem.

27. Számítsuk ki $1/(5+4)$ értékét a $\mathbb{Z}_7$ testben.

28. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_{30}$ gyűrű egy olyan nem nulla b elemét, amelyet ebben a gyűrűben 24-gyel megszorozva nullát kapunk.

29. Bontsuk az $x^3 + 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára a $\mathbb{Z}_3$ test fölött.

30. Hány **különböző** valós gyöke van az $x^3 - 3x + 2$ polinomnak?

Emlékeztetőül Cardano képlete az $x^3 + px + q$ polinomra:

$$\sqrt[3]{(-q/2) + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt[3]{(-q/2) - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}\,.$$

NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. (BSc.) **Algebra1 alap- és középszint: 4. vizsga/4** *2009. január 28.*

II. rész (30 perc). *A tétel teljesen precíz kimondása* 3 *pontot, az egész feladat* 10 *pontot ér. Középszinten a legalább elégséges osztályzathoz ebből a részből legalább* 5 *pontot kell szerezni.*

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, középszintűeknél pedig a második részben is legalább* 5 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első és a második részre kapott összpontszám* S*, akkor:*

	Osztályzat
$S \leq 19$	2
$20 \leq S \leq 25$	3
$26 \leq S \leq 31$	4
$32 \leq S \leq 40$	5

---

31. A (polinomokra vonatkozó) maradékos osztás tétele: létezés és egyértelműség.