NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

Mat. (BSc.) **Algebra1: 3. vizsga (alap- és középszint)** *2009. január 21.*

I. rész (75 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 15 *pontot, annak a vizsgája sajnos elégtelen (ekkor a második részt ki sem javítjuk.) Aki középszinten vizsgázik, annak a dolgozat második részéből is legalább 50%-ot kell szereznie ahhoz, hogy a vizsgája sikeres legyen.*

1. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor mennyi $\mathrm{Im}(\mathrm{Re}(z))$ abszolút értéke?

   0

2. Mennyi $-71\big(\cos(-71°) - i\sin(-71°)\big)$ szöge?

   251°

3. Melyik komplex szám lesz a $-1-i$-nek az origó körüli -225 fokos elforgatottja?

   $\sqrt{2}$

4. Legyen az α szög $\sqrt{360}$ fokos. Mennyi $\cos\alpha + i\sin\alpha$ rendje?

   végtelen (nincs véges rendje)

5. Ha $\varepsilon \in \mathbb{C}$ rendje $n \neq \infty$ és $\mathrm{Im}(\varepsilon) = -1$, akkor mennyi az n értéke?

   4

6. A jobb oldali egyenletrendszerben karikázzuk be a lehető legnagyobb számú egyenletet úgy, hogy ezek az x, y, z ismeretlenekre **lineáris** és **homogén** egyenletrendszert alkossanak.

$xy + z = 0$	nem lineáris
$x + z = 2$	nem homogén
$x - iz = 0$	karikázandó
$x^2 + y^2 = -2$	nem lineáris
$xyz = 0$	nem lineáris

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{5\times 9}$. Hányszor hányas B mátrixokra igaz, hogy $\det(AB)$ értelmes?

   9×5

8. Mennyi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2008}$?

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Ha A, B négyzetes mátrixok és AB az egységmátrix, akkor mi lesz $BABAB$ inverze?

   A

10. Adjunk példát két konkrét, nemnulla mátrixra, melyekre $A + B$ rangja $r(A) + r(B)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Hány inverzió keletkezik, amikor az alapsorrendben a tizedik és a századik elemet kicseréljük?

179

12. A 3×3-os (m_{ij}) determinánsban az első és a harmadik oszlop megegyezik (és így a determináns értéke nulla). Melyik tag fogja kiejteni a $(-1)^2 m_{2,1}m_{3,2}m_{1,3}$ tagot?

$(-1)^1 m_{1,1}m_{3,2}m_{2,3}$

13. Tegyük föl, hogy $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ és legyen N az M inverze. Ha $\det(M^6) = 2$, akkor mennyi lesz $\det(N^{12})$?

1/4

14. Egy ötször ötös (komplex elemű) A mátrix determinánsa 4. Mennyi lesz $\det A'$, ha az A' mátrixot úgy kapjuk, hogy A-t tükrözzük a harmadik oszlopára?

4

15. A háromszor hármas $N = (n_{ij})$ mátrix determinánsa 1/6, az n_{ij}-hez tartozó előjel **nélküli** aldetermináns X_{ij}. Írjuk föl N inverzét.

$$\begin{pmatrix} 6X_{11} & -6X_{21} & 6X_{31} \\ -6X_{12} & 6X_{22} & -6X_{32} \\ 6X_{13} & -6X_{23} & 6X_{33} \end{pmatrix}$$

16. Egy 6×4-es nemnulla mátrix első oszlopa és első sora is nulla. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

1, 2, 3

17. Adjunk példát olyan $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomra, melyre $f(x) + x^3 - \pi x$ nulladfokú.

Például $-x^3 + \pi x + 3$.

18. Írjunk föl egy olyan ezredfokú, komplex együtthatós polinomot, aminek pontosan három különböző komplex gyöke van.

$(x-1)^{998}(x-2)(x-3)$

19. Melyik az a hatodfokú, valós együtthatós polinom, melynek $-1+i$ háromszoros gyöke, és az 1 helyen felvett értéke 1?

$(x^2+2x+2)^3/125$

20. Mennyi az $5x^7 + 3x^5 + 2$ polinom gyökeinek a négyzetösszege?

$-6/5$

21. Mi a maradék, ha $x^4 + 1$-et maradékosan elosztjuk $2x - i$-vel?

17/16

22. Mi lesz $(x^2+1)^7(x+1)$ és $(x-i)^9$ kitüntetett közös osztója?

$(x - i)^7$

23. Hány irreducibilis polinom szorzatára bomlik **valós** fölött a Φ_{40} körosztási polinom?

$\varphi(40)/2 = 8$

24. Adjunk meg egy olyan egész együtthatós polinomot, amely **nem** irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, nincs racionális gyöke, és a foka egy száznál nagyobb **páratlan** szám.

Például $(x^5 + 7)^{1001}$.

25. Írjunk föl egy olyan hatodfokú, egész együtthatós polinomot, amely egyszerre teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium és a fordított Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

Például $2x^6 + 3$.

26. Bontsuk irreducibilisek szorzatára a $100x^3 + 100x - 200$ polinomot $\mathbb{Q}$ fölött. Hány irreducibilis tényező keletkezik?

$(100x - 100)(x^2 + x + 2)$, azaz 2 tényező.

27. Számítsuk ki $1/(5 + 6)$ értékét a $\mathbb{Z}_7$ testben.

2

28. Mely $n > 100$ egészekre igaz minden $a, b \in \mathbb{Z}_n$ esetén az $(5a = 5b \Rightarrow a = b)$ következtetés?

Ha n nem osztható 5-tel.

29. Hány irreducibilis polinom szorzata lesz $x^4 + 1$ a $\mathbb{Z}_2$ test fölött?

4 (mert ez $(x + 1)^4$)

30. Hány valós gyöke van az $x^3 - ix + 1$ polinomnak?

0, mert különben i is valós lenne (hiszen a 0 nem gyök).

Emlékeztetőül Cardano képlete az $x^3 + px + q$ polinomra:

$$\sqrt[3]{(-q/2) + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} + \sqrt[3]{(-q/2) - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}\,.$$

II. rész (30 perc). *A tétel teljesen precíz kimondása* 2 *pontot, az egész feladat* 10 *pontot ér. Középszinten a legalább elégséges osztályzathoz ebből a részből legalább* 5 *pontot kell szerezni.*

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, középszintűeknél pedig a második részben is legalább* 5 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első és a második részre kapott összpontszám S, akkor:*

	Osztályzat
$S \leq 19$	2
$20 \leq S \leq 25$	3
$26 \leq S \leq 31$	4
$32 \leq S \leq 40$	5

---

31. A második Gauss-lemma (ami a racionális és egész együtthatós felbontások kapcsolatáról szól). Minden felhasznált segédtételt precízen fogalmazzon meg, belátni nem kell őket.